

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА

Ю. І. ПРИЛУЦЬКИЙ

С. О. КОСТЕРІН

ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ БІОЛОГІВ

Навчальний посібник



УДК 51-7:57(075.8)
П76

Рецензенти:

д-р фіз.-мат. наук, проф., чл.-кор. НАН України Л. Ф. Суходуб
(Сумський державний університет);
д-р фіз.-мат. наук, доц. В. П. Берест
(Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна)

*Рекомендовано до друку вченою радою ННЦ "Інститут біології та медицини"
(протокол № 12 від 14 вересня 2024 року)*

*Ухвалено науково-методичною радою
Київського національного університету імені Тараса Шевченка
(протокол № 08-24 від 19 вересня 2024 року)*

Прилуцький Ю. І.

П76 Основи вищої математики для біологів : навч. посіб.
/ Ю. І. Прилуцький, С. О. Костерін. – Київ : ВПЦ "Київський універ-
ситет", 2024. – 143 с.

ISBN 978-966-933-308-7

Систематизовано лекційний матеріал з таких основних розділів вищої математики, як "Аналітична геометрія та лінійна алгебра", "Математичний аналіз" і "Звичайні диференціальні рівняння". Основну увагу зосереджено на роз'ясненні суті математичних понять, основних формул і вмінні їх коректно застосовувати під час розв'язування практичних завдань. Наведено значну кількість типових математичних прикладів і задач, зокрема й біологічного профілю, які пояснюють теоретичний матеріал, а також завдання різного ступеня складності для самостійної роботи студентів.

Для студентів біологічних і медичних спеціальностей закладів вищої освіти, які вивчають вищу математику.

УДК 51-7:57(075.8)

ISBN 978-966-933-308-7

© Прилуцький Ю. І., Костерін С. О., 2024
© Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
ВПЦ "Київський університет", 2024

*Велику книгу природи
написано математичними символами.*

Г. Галілей

*Завдання полягає не в тому, щоб навчати математики,
а в тому, щоб за посередництвом математики
дисциплінувати розум.*

В. Шрадер

ПЕРЕДМОВА

Математика є найважливішим атрибутом розвитку сучасного природознавства й технологій. Як відомо, математика була започаткована у грецькій філософії як один із напрямів пошуку істини при аналізі кількісних просторових співвідношень (у випадку землевимірювання – це геометрія, у випадку обчислень – арифметика). По суті, математика виникла для задоволення практичних потреб людини, а її мета переважно була спрямована на рахування, обчислення, вимірювання, досліджування форми й руху фізичних тіл. У свій час ще *Галілей* казав: *"Вимірюй усе, що піддається вимірові, і зроби таким усе, що не піддається вимірові"*. Пізніше математика розвинулася у диференційовану складну багатогранну науку про абстрактні кількісні та якісні співвідношення, форми, структури та властивості різноманітних систем. Утім, як зазначав *Тарстон* (і це цілком відповідає вищенаведеним словам *Шрадера*, які винесені в епіграф), *"математика – це не про числа, рівняння, розрахунки чи алгоритми, це – про розуміння"*.

Сучасна біологія при проведенні експериментальних і теоретичних досліджень активно використовує математичні підходи, перш за все – теорію диференціальних рівнянь, прикладну математику (включаючи математичне моделювання), інформатику й математичну статистику (біометрію), а також обчислювальну техніку та комп'ютерні технології. Іншими словами, ідеться про математичну біологію (математичне біомоделювання, або біоматематику), яку можна розглядати як частину обчислювальної біології. Безперечно, ми сприймаємо математичну біологію як трансдисциплінарну галузь наукових досліджень.

На теперішній час особливо активно та плідно використовують математичні підходи у фізико-хімічній біології (біофізиці, біохімії, молекулярній біології, нанобіотехнології тощо). Однак маємо й велику кількість ефективного застосування математики при розв'язанні проблем фізіології, клітинної біології, мікробіології, вірусології, генетики, геноміки, фармакології, біонеорганічної та біоорганічної хімії, ботаніки, зоології, морфології, екології, біомеханіки, хронобіології, біоінженерії, медицини й медичної біології, системної біології та біоінформатики, біостатистики. Загалом обчислювальну біологію варто розглядати як міждисциплінарну галузь науки, що виникла на стику біології і таких наук і наукових напрямів, як інформатика, обчислювальна техніка, прикладна математика і статистика, математичне моделювання біологічних процесів, з метою розуміння механізмів, що лежать в основі біологічних явищ, і розв'язання біологічних і біомедичних проблем – від дослідження генетичних послідовностей і молекулярних структур до вивчення складних біологічних мереж і систем.

Тут треба зазначити, що становлення і застосування різноманітних математичних підходів при вивченні біологічних систем, намагання аналізувати й трактувати біологічні процеси із залученням кількісних показників розпочалося ще у стародавні часи (*Арістотель*), але особливо активним стало у XIX–XX сторіччях. Тією чи іншою мірою відповідні міркування та результати, що в різні часи були одержані при намаганні застосувати математичні уявлення до вивчення біологічних систем на різних рівнях їхньої організації (молекулярному, мембранному, клітинному, тканинному, органному, організменому, популяційному), пов'язані з такими іменами, як *Фібоначчі (Пізанський), Бореллі, Дюбуа-Реймон, Томпсон, Мальтус, Ферхюльст, Ейлер, Пуазель, Мендель, Гельмгольц, Марков, Фішер, Вольтерра, Лотка, Крік, Хілл, Буркхард, Шмальгаузен, Леонтович, Рашевський, Бартлетт, Бурніштейн, Міхаеліс, Ментен, Бріггс, Холдейн, Вінер, фон Нейман, Берталанфі, Ешбі, Ходжкін, Хакслі, Катц, Тьюринг, Левінс, Бейлі, Джермен, Одум, Гильдерман, Пригожин, Рейхардт, Вейс, Кавано, Гінзбург, Уотермен, Тернер, Стюарт, Гальтон, Пірсон, Ейлер, Закманн, Мак-Артур, Лаос-Бельтра, Пюльман,*

Ейрінг, Еррі, Хіншелвуд, Ледлі, Дей, Леддер, Беллман, Гроссман, Тернер, Мюррей, Маррі, Бак, Капек та ін.

Проте, згідно із сучасними поглядами, якщо йдеться безпосередньо за фундаторів математичної біології, то до них можна віднести передусім *Фібоначчі, Бореллі, Томпсона, Вольтерра та Лотка, Холдейна та Фішера, а також Рашевського.*

Фібоначчі ще у 1202 р. розбудував просту модель зростання кількості осіб у популяції кролів (згадаймо *числа Фібоначчі*).

Бореллі у 1680 р. запропонував геометричний підхід до опису механіки руху тварин і людини.

Томпсон у 1917 р. видав фундаментальну математизовану роботу "*Про ріст та форму*".

Математики *Вольтерра* та *Лотка* у 1925–1926 рр. розробили уявлення екологічного напрямку в математичній біології – до розв'язання задачі "жертва – хижак" вони застосували теорію диференціальних рівнянь. Тут ішлося про систему двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку, яка описує кінетику чисельності популяції з одним видом хижаків і одним видом жертв. Характерною особливістю цих рівнянь є те, що їхнім розв'язком слугують періодичні функції, що описують автоколивання кількості осіб у популяціях.

Холдейн та *Фішер* у 1924–1930 рр. залучили математичні підходи до розв'язання питань теоретичної генетики.

Однак особливо хочеться згадати одного з видатних фахівців у галузі математичної біології, математичної біофізики й теоретичної біології – професора *Миколу (Ніколаса) Рашевського*, який народився в Україні у м. Чернігові й у свої студентські роки вивчав теоретичну фізику в Київському університеті, а у 1924 р. емігрував до США. У 1938 р. він видав одну з перших монографій із математичної біології та математичної біофізики під назвою "*Математична біофізика: фізико-математичні основи біології*". *Рашевський*, зокрема, досяг суттєвих успіхів у залученні математичних підходів до розв'язання проблем клінічної медицини: ідеться про дослідження затримування частинок у дихальних шляхах, проблеми кровообігу, кількісну інтерпретацію фармакологічних питань, вивчення функціонування ендокринної та центральної нервової системи (модель нейрон-

них мереж). Він аналізував топологію біологічних систем, мав значні здобутки в галузі формулювання фундаментальних принципів у системній і реляційній біології, розбудови уявлень щодо ієрархічної організації організмів та людського суспільства. Професор Рашевський мріяв висловити мовою математики біологічні принципи, що описують життя у всіх його виявленнях (у випадку мікроорганізмів, рослин і тварин), тобто створити єдину фундаментальну теорію біології.

В останні десятиріччя математична біологія як розділ прикладної математики активно розвивається. Можна навіть стверджувати, що в математиці виникли нові напрями й методи, які пов'язані з дослідженням складних, у тому числі й біологічних, систем, а саме – теорія автоматів, теорія ігор, методи оптимального регулювання, математична теорія інформації тощо. Відомі абсолютно конкретні випадки, коли розбудова й формулювання певних біологічних задач зумовлювали створення нових математичних технологій, тобто біологічна проблема стимулювала розвиток нових галузей математики (типовий приклад: результати досліджень у галузі генетики стимулювали подальший розвиток теорії імовірностей і варіаційної статистики).

В Україні ще у 1976 р. відбулася I Республіканська конференція *"Математичні методи в біології"*. У вступному слові під час відкриття конференції математик академік НАН України *Ю. А. Митропольський* зазначив, зокрема, таке: *"Що може дати математика біології, а біологія математиці – питання далеко не тривіальне. Зрозуміло одне, що біологічні науки для математиків – область маловивчена, яка є нелегкою для опанування, але вона є такою, що багато обіцяє дослідникам"*. У різні часи, тією чи іншою мірою, залучення математичних підходів до розв'язання біологічних проблем мало місце в багатьох університетах та інститутах НАН України – маємо на увазі роботи *Бернштейна, Глушкова, Давидова, Толтиго, Амосова, Гродзинського, Деркача, Антамонова, Петуніна, Кратко, Манзія, Мельника, Кликова, Далецького, Любича, Зими, Данилова, Бабського, Маркмана, Бесараба, Доброї, Іванова, Костюкова, Баєва, Желтовського, Говоруна*; нині працюють у галузі математичної біології та сумісних напрямках *Костерін,*

Бровченко, Чалий, Прилуцький, Жук, Волков, Корнелюк, Сиволоб, Супрун, Ляшенко, Мукоєд, Грищай, Цимбалюк, Перепелиця, Щербак, Карахім, Чуніхін та ін.

У 2023 р. на базі Інституту біохімії ім. О. В. Палладіна НАН України було започатковано загальноакадемічний міждисциплінарний семінар у галузі природничих наук "*Актуальні питання фізико-хімічної та математичної біології*" (науковий керівник семінару – академік НАН України професор *С. О. Костерін*), на якому систематично заслуховуються доповіді з фізико-хімічної біології та біоматематики.

А ось цікаво: ким себе більше відчуває дослідник, який розв'язує проблеми математичної біології, – біологом чи математиком? Більше того, у спільному науковому пошуку, спрямованому на залучення математики до вивчення біологічних процесів, незайвим є питання: а хто до кого повинен "іти" задля розв'язання міждисциплінарної наукової проблеми в галузі математичної біології – біолог до математика чи математик до біолога? Можливо, це питання не є дуже принциповим, але, усе ж таки, нам здається, що, швидше за все, – біолог до математика. Адже саме біолог повинен сформулювати коректну функціональну задачу в галузі наук про життя (тобто задачу, яка має біологічний сенс), яка в перспективі може бути формалізована й розв'язана. Дуже добре, якщо біолог має необхідну математичну підготовку й може сам кваліфіковано формалізувати задачу у вигляді математичної моделі, наприклад системи диференціальних рівнянь. У такому випадку математик може зосередити свою увагу на розв'язанні (аналітичному або чисельному) цієї системи. А далі спільними зусиллями біолог і математик зможуть розглянути одержаний модельний результат, зокрема різноманітні часткові випадки, які мають біологічний сенс, надати цьому результатowi біологічну інтерпретацію, передбачити властивості біологічної системи, які раніше не були ідентифіковані.

Утім, у будь-якому випадку, залучення математичних підходів при вивченні біологічних проблем є важливим тому, що, принаймні:

- сприяє пізнанню механізму процесу, який вивчають;
- дає можливість надати строгу кількісну інтерпретацію процесу, розрахувати необхідні характеристичні параметри біологічної системи;

▪ теоретично дозволяє розбудувати математичну модель процесу (напр., професор *Хокінг* стверджував, що *будь-яка теорія є доброю, якщо вона задовольняє, принаймні, дві вимоги: точно описує великий клас спостережень на основі моделі, яка містить лише кілька елементів; дозволяє робити точні передбачення щодо результатів майбутніх спостережень*).

Ми вважаємо, що найбільш ефективна співпраця між біологом і математиком може мати місце тоді, коли, як ми вже підкресливали, біолог володіє елементами математичної підготовки (алгебра; похідні та інтеграли; ряди; диференціальні рівняння; відповідна культура роботи з графічними залежностями, зокрема лінеаризованими графіками, оскільки "найліпша крива – це пряма!"); математична статистика), а математик є обізнаним у фундаментальних поняттях біології. На жаль, нині такі випадки є швидше винятком, ніж системою.

Є вагомими підстави стверджувати, що на теперішній час математичні підходи добре зарекомендували себе в різноманітних галузях і напрямках біологічної науки, таких, як біохімічна кінетика (ензиматична кінетика), фармако- й онкокінетика, біологічна термодинаміка, біофізика м'язів, дослідження механізмів генерації нервового імпульсу, клітинна нейробиологія, молекулярна рецепторика, імунологія, мікробіологія, радіобіологія, створення моделей клітинних автоматів, розбудова динамічної теорії біологічних популяцій, популяційна й порівняльна генетика, вивчення просторово-часової поведінки біологічних систем, екологія, епідеміологія, медична біологія, біомедична візуалізація та аналіз зображень біологічних об'єктів, біотехнологія тощо. Теоретично можна навіть вести мову про математичну фізику біологічних об'єктів, яка спрямована на вивчення кількісних закономірностей реалізації фізичних законів на біологічному рівні організації матерії.

Як конкретний приклад ефективного залучення математики до розв'язання біологічних проблем можна навести саме біохімічну кінетику, кількісні закони якої (рівняння *Міхаеліса* – *Ментен*, *Холдейна*, *Хілла*, *Уоккера* – *Шмідта* тощо) є надійним підґрунтям для вивчення закономірностей і механізму такого унікального біологічного феномену, як ензиматичний каталіз

(див., напр., [1]). Іншим прикладом є біофізика м'язового скорочення [2]. Особливої уваги заслуговує питання залучення математичних методів у медицині, зокрема до вивчення використання лікарських препаратів (згадаймо знову-таки роботи *Ращевського*, а також *Беллмана*).

Звичайно, важливою універсальною частиною аплікації математичних підходів до кількісного аналізу результатів біологічних досліджень є варіаційна статистика; тут доцільно згадати вислів видатного фізико-хіміка *Гуггенгейма*: *"Найбільш вдалі дослідження виявляються некорисними, якщо експериментатору не вдасться належним чином обробити дані, що були одержані"*.

В Україні розвиток біометричних досліджень пов'язаний з іменем *Леонтовича*. Автори цього посібника відносно нещодавно у співпраці з колегами видали підручник із біостатистики для університетів [3]. Зазначимо тут також навчально-методичний посібник [4], у якому наведено дуже слушний епіграф – цитата від відомого українського біофізика професора *Деркача* (засновник кафедри біофізики та математичних методів у біології біологічного факультету Львівського національного університету ім. Івана Франка): *"У практиці біолога-експериментатора окремі результати спостережень або аналізів, як правило, становлять інтерес тільки тоді, коли на їх основі можна зробити обґрунтовані узагальнення"*. Очевидно, що ця теза цілком відповідає вищенаведеному баченню *Гуггенгейма*.

Проте необхідно особливо підкреслити, що нині видатне значення у фізико-хімічній біології при застосуванні математичних підходів до розв'язання її проблем належить методам комп'ютерного моделювання (див., напр., [5]). І тут ми б хотіли віддати належне видатному українському кібернетику та математику академіку *Глушкову*, який у свій час розробив принципово нові підходи до створення комп'ютерних систем оброблення інформації, адже вони суттєво змінили уявлення про теорію систем управління і теорію обчислювальних систем, заклали підґрунтя для нового етапу розвитку науки про інформацію. У свій час в Інституті кібернетики НАН України під його науковим керівництвом були розроблені електронно-обчислювальна машина "Київ" і перша в Україні напівпровідникова електронно-обчислювальна машина

широкого призначення "Дніпро", а також попередники персональних комп'ютерів – електронно-обчислювальні машини для інженерних розрахунків "Промінь", "Мир-1" та "Мир-2" (1963–1969). Ще на початку становлення обчислювальної техніки Глушков започаткував дослідження з моделювання інтелектуальної діяльності. Також він багато уваги приділяв розробленню ідеї "мозкоподібних" структур електронно-обчислювальних машин (*штучний інтелект*, який сьогодні активно розвивається). Беручи до уваги видатні наукові заслуги академіка Глушкова, Міжнародне комп'ютерне товариство (IEEE Computer Society) присудило йому медаль "Піонер комп'ютерної техніки".

Нині активно використовують потенціал так званої "біології *in silico*", яка спрямована на проведення досліджень із використанням методології комп'ютерної симуляції біологічних процесів, явищ і систем на різноманітних ієрархічних рівнях їхньої організації – молекулярному, геномному, молекулярно-генетичному, мембранному, субклітинному, клітинному, органному, організменному, популяційному.

Найбільш фундаментальними задачами комп'ютерної біології є розшифрування геному, визначення просторової структури протеїнів і створення моделей функціонування біомакромолекул – протеїнів і нуклеїнових кислот – з використанням методів математичного й комп'ютерного моделювання, а також інформаційних технологій. Варто зазначити, що в Інституті молекулярної біології та генетики НАН України створена віртуальна лабораторія MolDynGrid для розв'язання задач у галузях структурної біології і біоінформатики, які потребують значних витрат машинного часу й оперують великими обсягами інформації. Ця лабораторія є частиною проекту розвитку грід-сегмента Національної академії наук України. Мета створення віртуальної лабораторії полягала в розробленні ефективної інфраструктури для проведення *in silico* розрахунків молекулярної динаміки біологічних макромолекул (білків, нуклеїнових кислот та їхніх комплексів) у водно-іонному оточенні в часовому інтервалі до 100 нс. У межах віртуальної лабораторії MolDynGrid створена база даних траєкторій молекулярної динаміки білків. Віртуальна лабораторія MolDynGrid інтегрована в європейську

грід-інфраструктуру й використовує кластери європейських країн, зокрема кластер Leibniz Rechnung Center (ФРН) (<https://moldyngrid.org>). Для навчальної роботи зі студентами й аспірантами створений навчальний вебмодуль у галузі молекулярної біології (<http://edu.imbg.org.ua>).

Звичайно, комп'ютерна біологія знаходить застосування при вивченні біофізико-хімічних процесів, які реалізуються не лише на молекулярному, але й на субклітинному, клітинному, організменому та популяційному рівнях. Необхідно підкреслити, що застосування методологій комп'ютерної та математичної біології є важливим для аналізу проблем, пов'язаних із фармакологією, екологією, охороною довкілля, поведінкою живих істот, для розбудови математичних моделей біобезпеки, епідеміології та соціальних систем і процесів. Як приклад можемо згадати роботу члена-кореспондента НАН України *Бровченка* та співробітників, що була виконана в НАН України в галузі математичного моделювання розповсюдження епідемії коронавірусу SARS-CoV-2 в Україні.

Отже, ми маємо визнати, що застосування математичних підходів і комп'ютерних технологій є вкрай корисним при дослідженні біологічних процесів на всіх рівнях організації живих систем. Тут, мабуть, доречно згадати вислів *Канта*: "*У кожній природничій науці вміщено стільки істини, скільки у ній є математики*". Утім, маючи на увазі біологію, може, і не варто абсолютизувати ці слова *Канта*, однак є очевидним, що для системи "біологія + математика" властивим є своєрідний зворотний зв'язок: можна впевнено стверджувати, що для допитливого математика біологічні явища вкрай цікаві й перспективні з погляду формулювання принципово нових математичних задач. Тому доречно, посилаючись на *Моровиця*, процитувати таку його думку: "*У сучасній математиці ми бачимо низку слабких місць, які вказують на те, що для біологічних аплікацій, можливо, виникне потреба побудови нової математики; на ці слабкості ясніше за все вказує відсутність ефективної теорії систем та висновок фон Неймана про те, що, принаймні, один аспект біологічної функції ґрунтується на математиці невідомого нині типу*".

Однак давайте згадаємо слова видатного математика й кібернетика *Вінера*: "*Математика – наука молодих. Інакше й не мо-*

же бути. Заняття математикою – це така гімнастика розуму, для якої потрібні вся згучність і вся витривалість молодості".

Цей посібник, що написаний у творчій співпраці фахівця з галузі фізико-математичних наук і біолога, має за мету ознайомити молоде покоління – студентів-біологів – з основами вищої математики й продемонструвати можливість її аплікації до розв'язання біологічних проблем (переважно в галузі фізико-хімічної біології).

Посібник складається з двох частин. У першій викладено основи вищої математики (аналітичної геометрії та лінійної алгебри, математичного аналізу, теорії звичайних диференціальних рівнянь), тобто ті її розділи, які зазвичай використовують при описі біологічних явищ і моделюванні їхніх механізмів. У другій частині посібника йдеться про використання математичних підходів до розв'язання вибраних наукових біологічних проблем. На сторінках посібника, відповідно до теоретичного матеріалу, автори намагалися навести значну кількість типових математичних прикладів і задач, у тому числі й у сфері як суто математики, так і біології, фізики й хімії, а також завдань різного ступеня складності для самостійної роботи студентів. Адже, як казав видатний математик Поїа, *"якщо ви хочете навчитися плавати, то сміливо ступайте у воду, а якщо хочете навчитися розв'язувати задачі, то розв'яжуйте їх!"*.

Наведені у посібнику приклади, які ілюструють залучення математичних підходів до розв'язання проблем із біології, були апробовані на лекціях, які упродовж багатьох років читали його автори студентам Київського національного університету імені Тараса Шевченка з дисциплін "Загальна біофізика" (вибрані розділи), "Біофізична хімія іонного транспорту", "Методи кінетичного аналізу у фізико-хімічній біології", "Біохімічна кінетика" (С. О. Костерін); "Вища математика", "Медична біофізика", "Статистичні методи в біології", "Комп'ютерне моделювання в біології" (Ю. І. Прилуцький).

На завершення ми хотіли б згадати слова Крістала, що можуть слугувати побажанням для студентів-біологів, які приступають до вивчення основ вищої математики й математичної біології: *"Кожну математичну книжку, варту читання, треба перечитувати вздовж і впоперек"*. І, дещо змінивши Лагранжеву

пораду, закликати: *ідіть далі, але частіше повертайтеся, щоб скріпити віру; якщо ж вам трапиться важкий чи нудний абзац, то пропустіть його – ви повернетеся до нього пізніше, коли зрозумієте його важливість або відчуєте потребу в ньому для подальшого читання.*

Автори висловлюють щирю подяку рецензентам цього посібника за цінні зауваження і рекомендації, що були спрямовані на поліпшення його змісту, а також колегам – канд. біол. наук В. М. Сороці та д-рці біол. наук Т. О. Векліч – за допомогу з підготовки рукопису до друку.

Жодне людське дослідження не може називатися істинною наукою, якщо воно не пройшло через математичні доведення.

Леонардо да Вінчі

РОЗДІЛ 1

ОСНОВИ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ ТА ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

1.1. Вектор.

Декартова система координат

Багато біофізичних величин (маса й температура тіла, тиск і рН середовища тощо) визначають шляхом задання деякого конкретного числа. Такі величини називають *скалярними*. Водночас, наприклад, при переміщенні іонів у каналі мембран потрібно знати не лише значення швидкості, але й напрямок руху. Такі величини називають *векторними*.

Будь-яка пара точок A і B простору визначає напрямлений відрізок. Точка A – його початок, а точка B задає його кінець. Направлений відрізок у просторі називають *вектором*. Позначимо його як \overrightarrow{AB} . Відстань між початком і кінцем вектора називають його довжиною і позначають $|\overrightarrow{AB}|$.

Якщо $|\overrightarrow{AB}| = 1$, то такий вектор називають *одичинним* (або *орт*).

Прямокутну (декартову) систему координат $Oxuz$ у просторі визначають заданням масштабної одиниці вимірювання довжин і трьох взаємно перпендикулярних напрямлених осей, які пересікаються в одній точці O (початок координат):

- Ox (вісь абсцис – її напрямок указує орт \vec{i});

- Oy (вісь ординат – її напрямок указує орт \vec{j});
- Oz (вісь абсцис – її напрямок указує орт \vec{k}).

Упорядковану трійку векторів \vec{i} (1), \vec{j} (2) і \vec{k} (3) називають *базисними векторами* (або *базисом*) (рис. 1.1).

Нехай M – довільна точка простору. Розглянемо вектор \vec{OM} . Прямокутними координатами точки M (або вектора \vec{OM}) називають числа $X = |\vec{OM}|_x$, $Y = |\vec{OM}|_y$ і $Z = |\vec{OM}|_z$, тобто довжини проєкції цього вектора на осі Ox , Oy та Oz , відповідно: $M(X;Y;Z)$ (або $\vec{OM}\{X;Y;Z\}$) (рис. 1.1).

Проєкція вектора \vec{OM} , наприклад на вісь Oz , дорівнює довжині вектора \vec{OM} , помноженій на косинус кута φ між вектором \vec{OM} і віссю Oz , тобто

$$|\vec{OM}|_{Oz} = |\vec{OM}| \cos \varphi. \quad (1.1)$$

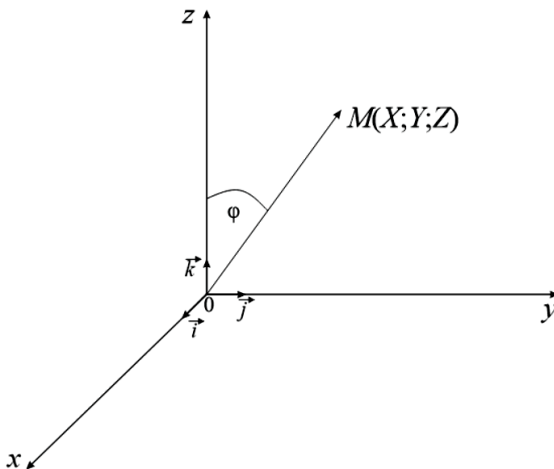


Рис. 1.1. Прямокутна (декартова) система координат $Oxyz$.

Вектор \overline{OM} може бути єдиним чином розкладений за базисом:

$$\overline{OM} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}. \quad (1.2)$$

Площини Oxy , Oxz і Oyz називають *координатними площинами*.

Для будь-яких довільних точок простору $A(X_1; Y_1; Z_1)$ і $B(X_2; Y_2; Z_2)$ координати вектора \overline{AB} у декартовій системі координат визначають єдиною впорядкованою трійкою чисел $\tilde{X} = X_2 - X_1$; $\tilde{Y} = Y_2 - Y_1$; $\tilde{Z} = Z_2 - Z_1$ і

$$|\overline{AB}| = \sqrt{\tilde{X}^2 + \tilde{Y}^2 + \tilde{Z}^2}. \quad (1.3)$$

1.2. Скалярний і векторний добутки

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a} \{X_1; Y_1; Z_1\}$ і $\vec{b} \{X_2; Y_2; Z_2\}$ називають число, яке дорівнює

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2, \quad (1.4)$$

де φ – кут між векторами \vec{a} та \vec{b} і

$$\cos \varphi = \frac{X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}. \quad (1.5)$$

Зауваження 1. Типовим прикладом скалярного добутку в механіці є формула для розрахунку роботи (A) за переміщенням тіла на задану відстань (s): $A = |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \varphi$, де вектор \vec{F} – сила, точка прикладання якої (центр ваги тіла) переміщується з початку в кінець вектора \vec{s} .

Приклад 1.1. Згідно з умовою (1.4) для базисних векторів маємо: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$, $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$.

Приклад 1.2. У просторі задано три точки: $A(2; 1; 2)$, $B(1; 1; 1)$ і $C(2; 2; 1)$. Знайти кут $\varphi = \angle ABC$.

Розв'язання. Згідно з умовою (1.3) маємо $\overline{BA} \{1;0;1\}$ і $\overline{BC} \{1;1;0\}$. Нам потрібно знайти величину кута між векторами

\overrightarrow{BA} і \overrightarrow{BC} . За формулою (1.5) знаходимо: $\cos \varphi = \frac{1+0+0}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$.

Отже, $\varphi = 60^\circ$. ►

Векторним добутком двох векторів $\vec{a} \{X_1; Y_1; Z_1\}$ і $\vec{b} \{X_2; Y_2; Z_2\}$ називають вектор $\vec{c} \{X; Y; Z\}$, перпендикулярний кожному із цих векторів \vec{a} і \vec{b} (тобто $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$ і, відповідно, $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$, $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$) і довжина якого становить $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \varphi$, де φ – кут між векторами \vec{a} і \vec{b} :

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= [\vec{a} \times \vec{b}] = \vec{c} (X = Y_1 Z_2 - Y_2 Z_1; Y = \\ &= Z_1 X_2 - Z_2 X_1; Z = X_1 Y_2 - X_2 Y_1). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Для векторного добутку справедлива властивість антиперестановки: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Зауваження 2. Типовим прикладом векторного добутку в механіці є формула для розрахунку моменту сили $\vec{F} = \overrightarrow{MK}$, прикладеної в точці M відносно деякої точки простору O : $\vec{N} = \overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{MK}$ (по суті, момент сили характеризує дію сили, що може викликати обертальний рух навколо точки O).

Приклад 1.3. Згідно з умовою (1.6) для базисних векторів маємо:

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0, \quad \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

(циклічна перестановка із чисел $1 \rightarrow \vec{i}, 2 \rightarrow \vec{j}, 3 \rightarrow \vec{k}$: 123; 231; 312).

Приклад 1.4. Задано вектори $\vec{a} \{1; 2; 4\}$ і $\vec{b} \{2; 5; 7\}$. Знайти довжину вектора $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Розв'язання. Згідно з умовами (1.6) та (1.3) маємо:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \{-6; 1; 1\} \text{ і } |\vec{c}| = \sqrt{38}. \blacktriangleright$$

1.3. Рівняння прямої та площини

У декартовій системі координат будь-яка пряма задається рівнянням першого степеня – лінією першого порядку (загальне рівняння прямої)

$$Ax + By + C = 0, \quad (1.7)$$

де A , B і C – відмінні від нуля коефіцієнти.

Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k , яка лежить у координатній площині Oxy , має вигляд

$$y = kx + b, \quad (1.8)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$ (α – кут нахилу прямої до осі Ox) і b – величина відрізка, який відсікає пряма на осі Oy (рис. 1.2).

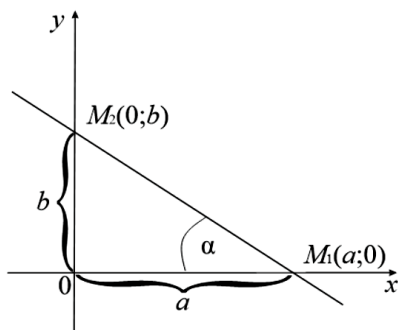


Рис. 1.2. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = kx + b, \text{ де } k = \operatorname{tg} \alpha \text{ і } b = |OM_2|$$

Відповідно до рівняння (1.7) маємо: $k = -\frac{A}{B}$; $b = -\frac{C}{B}$.

Для того, щоб побудувати рівняння прямої, достатньо знати координати лише двох точок – $A(X_1; Y_1)$ та $B(X_2; Y_2)$, через які вона проходить:

$$\frac{y - Y_1}{Y_2 - Y_1} = \frac{x - X_1}{X_2 - X_1}. \quad (1.9)$$

Вираз (1.7) можна переписати у такій формі (рівняння прямої у відрізках):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad (1.10)$$

де $a = -\frac{C}{A}$ і $b = -\frac{C}{B}$ – величини відрізків, які пряма відсікає на осях абсцис і ординат, відповідно (рис. 1.2).

Рівнянням (1.10) зручно користуватися у випадку геометричної побудови прямої.

Приклад 1.5. Вант-Гофф і Арреніус запропонували емпіричну залежність сталої швидкості реакції взаємодіючих речовин A і B від температури (T) (рівняння Арреніуса):

$$k(T) = k_0 e^{-\frac{E_a}{RT}}.$$

Тут E_a – енергія активації (той енергетичний бар'єр, який мають подолати молекули A і B для здійснення реакції); k_0 – частота зіткнення реагуючих молекул; R – універсальна газова стала.

Тоді експоненційний множник $e^{-\frac{E_a}{RT}}$ визначає частоту ефективних зіткнень, унаслідок яких реалізується ця реакція.

Для визначення енергії активації E_a за експериментальними даними будують графік лінійної залежності $y = \ln k$ від $x = \frac{1}{T}$

$$\text{(рис. 1.3): } y = \ln k = \ln k_0 - \frac{E_a}{R} \cdot \frac{1}{T} = \sigma + \varepsilon x.$$

З нахилу отриманої прямої до осі абсцис (рис. 1.3) визначають величину E_a :

$$\varepsilon = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{E_a}{R} \Rightarrow E_a = -R \operatorname{tg} \alpha.$$

Приклад 1.6. Побудувати пряму, задану рівнянням

$$3x - 4y + 10 = 0.$$

Розв'язання. Згідно з формулою (1.10) маємо: $\frac{x}{-10/3} + \frac{y}{5/2} = 1$.

Проводимо пряму через точки $M_1(-10/3; 0)$ і $M_2(0; 5/2)$. ►

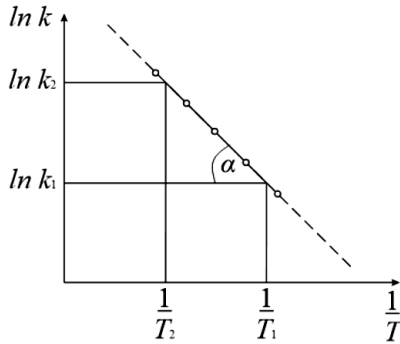


Рис. 1.3. Графік залежності $\ln k$ від $\frac{1}{T}$ (графік Арреніуса)

Приклад 1.7. Дві прямі задано рівняннями $2x - y - 3 = 0$ і $-3x - y + 2 = 0$. Знайти кут між прямими.

Розв'язання. За формулою (1.8) знайдемо кутові коефіцієнти цих прямих: $k_1 = \operatorname{tg}\alpha_1 = 2$ і $k_2 = \operatorname{tg}\alpha_2 = -3$. Кут між прямими становить $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$ (або $\pi - \varphi$). Звідси $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 1$.

Отже, один із кутів між заданими прямими становить 45° (гострий), а інший 135° (тупий). ►

Зауваження. Якщо дві прямі паралельні ($\vec{a} \parallel \vec{b}$), то $k_1 = k_2$, оскільки $\varphi = 0$ ($\operatorname{tg}\varphi = 0$). Якщо ж дві прямі перпендикулярні ($\vec{a} \perp \vec{b}$), то $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, оскільки $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ($\operatorname{tg}\varphi \rightarrow \infty$).

Рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0 \quad (1.11)$$

є загальним рівнянням площини (*поверхня першого порядку*). Тут A, B, C і D – сталі коефіцієнти.

Значимо, що три точки у просторі єдиним чином визначають рівняння площини.

1.4. Лінії та поверхні другого порядку

Лінії, рівняння яких у декартовій системі координат є рівняннями другого степеня, називають *лініями другого порядку* (еліпс, гіпербола й парабола).

Еліпс – замкнена плоска крива, сума відстаней від кожної точки якої до двох фіксованих точок F_1 і F_2 є сталою величиною:

$$|M_1F_1| + |M_1F_2| = |M_2F_1| + |M_2F_2| = |A_1A_2| = \text{const} \text{ (рис. 1.4).}$$

Точки $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$ називають фокусами еліпса; точки $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; b)$ і $B_2(0; -b)$ – його вершинами; $|A_1A_2| = 2a$ – велика вісь еліпса (a – велика піввісь еліпса); $|B_1B_2| = 2b$ – мала вісь еліпса (b – мала піввісь еліпса); O – центр еліпса (рис. 1.4).

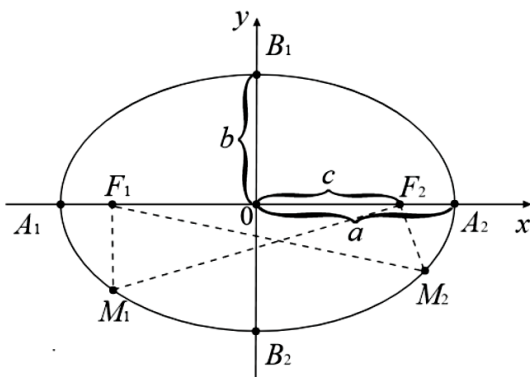


Рис. 1.4. Еліпс: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $a = |OA_2|$ і $b = |OB_1|$ – велика й мала півосі еліпса, відповідно

Канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.12)$$

Величину $0 < \varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} < 1$ називають *ексцентриситетом* еліпса; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ – половина відстані між фокусами.

Зауваження 1. З механіки руху небесних тіл відомо, що ексцентриситет орбіти Землі достатньо малий ($\varepsilon \ll 1$), і тому вона рухається по еліпсу, в одному з фокусів якого знаходиться Сонце (чим більше ексцентриситет, тим більше витягнутий еліпс).

Якщо $a = b$, то рівняння (1.12) є рівнянням кола із центром у початку координат і радіусом a ($\varepsilon = 0$):

$$x^2 + y^2 = a^2. \quad (1.13)$$

Поверхня другого порядку, яка у просторі визначається рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad (1.14)$$

називається *еліпсоїдом* (a, b і c – його півосі).

Якщо $a = b = c$, то еліпсоїд є сферою з радіусом a :

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2. \quad (1.15)$$

Зауваження 2. Зазначимо, що Земля має форму, близьку до сферичної. Глобулярні білки відрізняються за формою: є сферична (рис. 1.5а) і еліпсоїдна (рис. 1.5б).

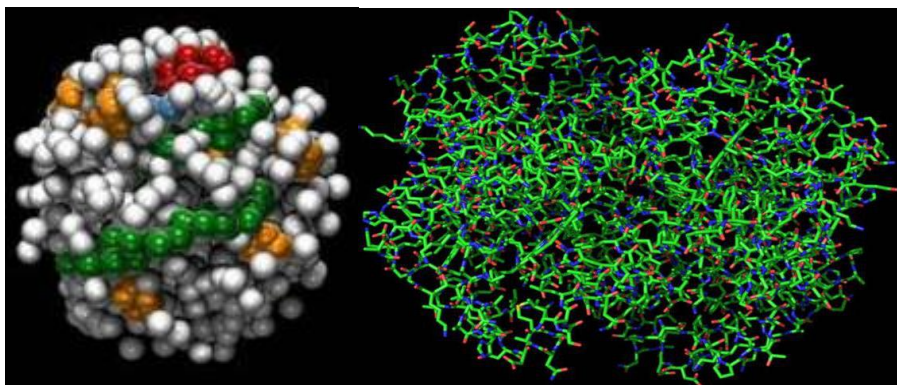
Гіпербола – геометричне місце точок на площині, різниця відстаней від яких до двох заданих точок – фокусів $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$ – є величиною сталою і меншою, ніж відстань між фокусами: $|MF_1| - |MF_2| = 2a < 2c$ (рис. 1.6).

Точка O – центр гіперболи, точки $A_1(-a; 0)$ і $A_2(a; 0)$ – її вершини. Ox та Oy – осі симетрії гіперболи (рис. 1.6).

Канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (1.16)$$

де a і b називаються дійсною і уявною півосями гіперболи, відповідно.



а

б

Рис. 1.5. Глобулярні білки різної форми:
а – близькі до сфери; б – близькі до еліпсоїда

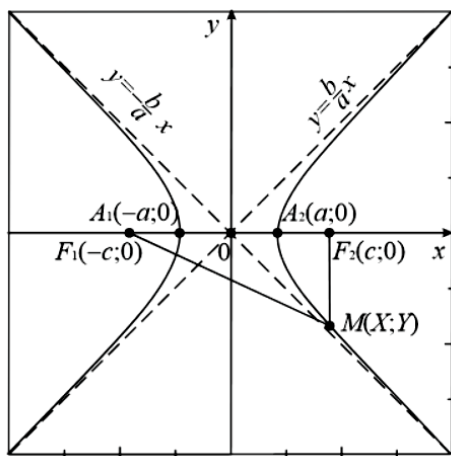


Рис. 1.6. Гіпербола: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

де $a = |OA_2|$ і b – дійсна й уявна півосі гіперболи, відповідно

Для гіперболи характерно, що $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2} > 1$;

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$ – половина відстані між фокусами.

Гіпербола (1.16) має дві асимптоти (прямі, до яких максимально наближаються точки гіперболи, коли $x \rightarrow \pm \infty$): $y = \pm \frac{b}{a}x$

(на рис. 1.6 вони зображені пунктирними лініями).

Парабола – геометричне місце точок на площині, рівновіддалених від фіксованої точки – фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ – і фіксованої прямої (директриси) $x = -\frac{p}{2}$ (рис. 1.7).

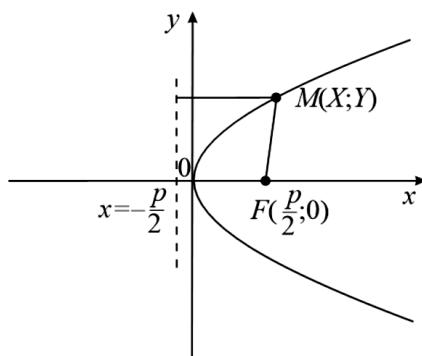


Рис. 1.7. Парабола: $y^2 = 2px$

Точка O – вершина параболи, Ox – вісь її симетрії (рис. 1.7).

Канонічне рівняння для параболи має вигляд

$$y^2 = 2px. \quad (1.17)$$

Для лінії другого порядку параболи $\varepsilon = 1$.

Зауваження 3. На практиці частіше використовують рівняння параболи у формі $y = ax^2 + b$.

10. Визначте параметри k і b прямої, яка проходить через точку $A(2;3)$ і утворює з віссю Ox кут 45° .

11. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-4; 6)$ і відсікає від осей координат трикутник площею, що дорівнює 3 од.².

12. Напишіть рівняння прямої, яка проходить через точки $A(-1; 3)$ і $B(4; -2)$.

13. Запишіть рівняння двох прямих, які проходять через точку $A(4; 5)$ так, щоб одна з них була паралельна осі Ox , а інша – осі Oy .

14. Запишіть рівняння прямої, яка паралельна осі Oy і відсікає на осі Ox відрізок, що дорівнює: 1) 4 ; 2) -5 ; 3) 0 .

15. Знайдіть рівняння прямих, які проходять через початок координат під кутом 45° до прямої $y = 4 - 2x$.

16. Запишіть рівняння перпендикуляра, опущеного з точки $A(6; 2)$ на пряму $x - 4y - 7 = 0$.

17. Ординати всіх точок кола $x^2 + y^2 = 36$ стиснуті втричі. Запишіть рівняння отриманої кривої.

18. Гіпербола проходить через точку $A(6; -2\sqrt{2})$ і має уявну піввісь $b = 2$. Запишіть її рівняння і знайдіть відстань від точки A до фокусів.

19. Знайдіть відстань від фокуса гіперболи $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$ до її асимптот і кут між цими асимптотами.

20. Запишіть канонічне рівняння параболи, яка:

1) проходить через точку $(1; -3)$ і є симетричною відносно осі Ox ;

2) проходить через точку $(2; -4)$ і є симетричною відносно осі Oy .

1.5. Системи алгебраїчних рівнянь. Матриці, визначники та їхні властивості

Розв'язання багатьох модельних задач у біології часто потребує знаходження розв'язку систем лінійних або нелінійних рівнянь. Розглянемо, наприклад, систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь із двома невідомими x та y :

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = h_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = h_2. \end{cases} \quad (1.18)$$

Усі коефіцієнти a (їх чотири) та вільні члени h (їх два) вважаємо заданими та відмінними від нуля.

Для того, щоб розв'язати систему рівнянь (1.18), скористаємося *методом послідовного виключення*, суть якого полягає в тому, що з першого рівняння одна з невідомих змінних, наприклад y , виражається через іншу невідому змінну x і підставляється в інше рівняння:

$$\begin{aligned} \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = h_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = h_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{h_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x \\ a_{21}x + a_{22}\left(\frac{h_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x\right) = h_2 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{h_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x \\ a_{21}x + \frac{a_{22}h_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}}x = h_2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{h_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x \\ x\left(a_{21} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}}\right) = h_2 - \frac{a_{22}h_1}{a_{12}} \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{h_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}x \\ x = \frac{h_2 - \frac{a_{22}h_1}{a_{12}}}{a_{21} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{a_{22}h_1 - a_{12}h_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \\ y = \frac{h_1}{a_{12}} - \frac{a_{11}}{a_{12}}\left(\frac{a_{22}h_1 - a_{12}h_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right). \end{cases}$$

Вважаємо, що значення виразу $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$.

Приклад 1.8. Знайти розв'язки заданої системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ -5x + 3y + 2z = 1 \\ 7x + 2y - z = 8. \end{cases}$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} 2x + y + z = 4 \\ -5x + 3y + 2z = 1 \\ 7x + 2y - z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - y \\ -5x + 3y + 2z = 1 \\ 7x + 2y - z = 8 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} z = 4 - 2x - y \\ -5x + 3y + 2(4 - 2x - y) = 1 \\ 7x + 2y - 4 + 2x + y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - y \\ -9x + y + 8 = 1 \\ 9x + 3y - 4 = 8 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} z = 4 - 2x - y \\ y = -7 + 9x \\ 9x + 3(-7 + 9x) - 4 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - y \\ y = -7 + 9x \\ 36x - 25 = 8 \end{cases} \\ \Rightarrow & \begin{cases} z = 4 - 2x - y \\ y = -7 + 9x \\ x = \frac{11}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 4 - 2x - y \\ y = -7 + 9x \\ x = \frac{11}{12} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{12} \\ y = 1\frac{1}{4} \\ z = x = \frac{11}{12}. \end{cases} \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 1.9. Знайти парціальні тиски чистих компонентів суміші p_1 , p_2 і p_3 , якщо відомо їхній сумарний тиск P за фіксованих різних значень температури:

N_1 (молекулярна частка суміші)	N_2 (молекулярна частка суміші)	N_3 (молекулярна частка суміші)	P (Па; тиск суміші за сталої температури)
0,8	0,1	0,1	1840
0,2	0,7	0,1	1860
0,05	0,05	0,9	236

Розв'язання. Згідно із законом Дальтона $P = \sum_{i=1}^3 N_i p_i$. Отже,

маємо таку систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} 0,8p_1 + 0,1p_2 + 0,1p_3 = 1840 \\ 0,2p_1 + 0,7p_2 + 0,1p_3 = 1860 \\ 0,05p_1 + 0,05p_2 + 0,9p_3 = 236. \end{cases}$$

Розв'яжемо її:

$$\begin{cases} 0,8p_1 + 0,1p_2 + 0,1p_3 = 1840 \\ 0,2p_1 + 0,7p_2 + 0,1p_3 = 1860 \\ 0,05p_1 + 0,05p_2 + 0,9p_3 = 236 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,8p_1 + 0,1p_2 + 0,1p_3 = 1840 \\ -0,6p_1 + 0,6p_2 = 20 \\ 0,05p_1 + 0,05p_2 + 0,9p_3 = 236 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,8p_1 + 0,1p_2 + 0,1p_3 = 1840 \\ p_1 = p_2 - \frac{100}{3} \\ 0,05p_1 + 0,05p_2 + 0,9p_3 = 236 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,9p_2 + 0,1p_3 = \frac{5600}{3} \\ p_1 = p_2 - \frac{100}{3} \\ 0,05p_1 + 0,05p_2 + 0,9p_3 = 236 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_3 = \frac{56000}{3} - 9p_2 \\ p_1 = p_2 - \frac{100}{3} \\ 0,05p_1 + 0,05p_2 + 0,9p_3 = 236 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_3 = \frac{56000}{3} - 9p_2 \\ p_1 = p_2 - \frac{100}{3} \\ 0,05\left(p_2 - \frac{100}{3}\right) + 0,05p_2 + 0,9\left(\frac{56000}{3} - 9p_2\right) = 236 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_3 = \frac{56000}{3} - 9p_2 \\ p_1 = p_2 - \frac{100}{3} \\ p_2 = \frac{49687}{24} \approx 2070 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_3 = \frac{817}{24} \approx 34 \\ p_1 = \frac{48887}{24} \approx 2037 \blacktriangleright \\ p_2 = \frac{49687}{24} \approx 2070. \end{cases}$$

Таблиця, складена з коефіцієнтів a за невідомих змінних x та у системи рівнянь (1.18) і записана у вигляді

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \text{або} \quad (1.19)$$

$$A = (a_{ij}), \quad i = \overline{1,2}; j = \overline{1,2},$$

називається *матрицею* A . a_{ij} – елементи цієї матриці, які розміщені на перетині рядка i (i – його номер) і стовпчика j (j – його номер).

Елементи матриці a_{ii} називають діагональними (вони розташовані на головній діагоналі). Елементи матриці A (1.19) a_{12} та a_{21} розташовані на бічній діагоналі.

Якщо $i \neq j$, то матрицю $A = (a_{ij})$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, k}$) називають прямокутною. У випадку, коли $i = j = n$, матрицю $A = (a_{ij})$ ($i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}$) називають *квадратною n -го порядку*. Наприклад, квадратна матриця (1.19) – другого порядку ($n = 2$).

Якщо $i = 1$, а $j > 1$ (або навпаки, $j = 1$, а $i > 1$), то отримуємо

матрицю-рядок $(a_1 a_2 \dots a_n)$ або матрицю-стовпець $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Дві матриці $A = (a_{ij})$ і $B = (b_{ij})$ рівні, якщо рівні між собою їхні відповідні елементи: $a_{ij} = b_{ij}$.

Якщо $a_{ij} = a_{ji}$, то матрицю A називають симетричною.

Матриці однакового порядку (однакової розмірності) можна поелементно додавати й перемножувати на число.

Приклад 1.10. Дано $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Обчислити $A + 2B$.

Розв'язання:

$$A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Добутком матриці $A = (a_{ij})$ ($i = \overline{1, m}$; $j = \overline{1, k}$) на матрицю $B = (b_{jl})$ ($j = \overline{1, k}$; $l = \overline{1, n}$) називається матриця $C = A \cdot B = (c_{il})$ ($i = \overline{1, m}$; $l = \overline{1, n}$), у якій елемент c_{il} дорівнює сумі добутків елементів i -го рядка матриці A та j -го стовпчика матриці B , тобто

$$c_{il} = \sum_{j=1}^k a_{ij} b_{jl} = a_{i1} b_{1l} + a_{i2} b_{2l} + a_{i3} b_{3l} + \dots + a_{ik} b_{kl}. \quad (1.20)$$

Звідси випливає, що матрицю A можна перемножити на матрицю B лише тоді, коли кількість стовпчиків матриці A збігається з кількістю рядків матриці B . Зокрема, квадратні матриці можна перемножити, якщо вони мають однаковий порядок.

Нехай дано матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$.

Тоді їхній добуток визначається так:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21} & a_{11} b_{12} + a_{12} b_{22} & a_{11} b_{13} + a_{12} b_{23} \\ a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} & a_{21} b_{12} + a_{22} b_{22} & a_{21} b_{13} + a_{22} b_{23} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.11. Дано $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Обчислити $A \cdot B$.

Розв'язання:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Приклад 1.12. Дано $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

Обчислити $A \cdot B$ та $B \cdot A$.

Розв'язання:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

та

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}. \blacktriangleright$$

Як впливає з вищенаведеного прикладу, $A \cdot B \neq B \cdot A$, тобто в загальному випадку для добутку двох матриць властивість перестановки не є характерною.

Матриця, у якої елементи на головній діагоналі дорівнюють одиниці ($a_{ii} = 1$), а всі інші елементи дорівнюють нулю, називається *одиничною*:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.21)$$

Для будь-якої матриці A справедлива така властивість:

$$A \cdot E = E \cdot A = A. \quad (1.22)$$

З поняттям квадратної матриці тісно пов'язане поняття визначника (або детермінанта). Наприклад, *визначником* другого порядку ($n=2$), який відповідає матриці другого порядку A (1.19), називається число, яке позначають символом

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

і визначають за таким правилом (різниця між добутком елементів, які знаходяться на головній діагоналі матриці A , і добутком елементів, які знаходяться на бічній діагоналі матриці A):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.23)$$

Зауваження. Отже, розв'язки системи алгебраїчних рівнянь (1.18) існують тоді, коли визначник матриці A , побудованої з коефіцієнтів при невідомих змінних, не дорівнює нулю:

$$\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0.$$

Визначники вищих порядків, зокрема третього порядку ($n=3$)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad (1.24)$$

визначають за таким правилом (напр., за фіксованого i -го номера рядка):

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{i+j} a_{ij} \tilde{A}_{ij} = \\ &= (-1)^{i+1} a_{i1} \tilde{A}_{i1} + (-1)^{i+2} a_{i2} \tilde{A}_{i2} + (-1)^{i+3} a_{i3} \tilde{A}_{i3}, \end{aligned} \quad (1.25)$$

де \tilde{A}_{ij} – мінор елемента a_{ij} визначника (1.24).

Мінором деякого елемента визначника називають визначник, який отримують із цього визначника шляхом викреслювання рядка і стовпчика, на перетині яких розташований зазначений елемент. Наприклад, мінором елемента a_{11} визначника (1.24) є визначник другого порядку:

$$\tilde{A}_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Величину $A_{ij} = (-1)^{i+j} \tilde{A}_{ij}$ за фіксованих значень i та j називають *алгебраїчним доповненням* елемента a_{ij} визначника.

Приклад 1.13. Обчислити $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 4 & 12 & 9 \\ 6 & 19 & 17 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Розкриваємо визначник, наприклад за першим рядком ($i = 1$). Згідно з формулами (1.25) і (1.23) маємо:

$$\begin{aligned} \Delta &= \sum_{j=1}^3 (-1)^{1+j} a_{1j} \tilde{A}_{1j} = (-1)^2 a_{11} \tilde{A}_{11} + (-1)^3 a_{12} \tilde{A}_{12} + (-1)^4 a_{13} \tilde{A}_{13} = \\ &= a_{11} \tilde{A}_{11} - a_{12} \tilde{A}_{12} + a_{13} \tilde{A}_{13} = \\ &= 2 \begin{vmatrix} 12 & 9 \\ 19 & 17 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 4 & 9 \\ 6 & 17 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 12 \\ 6 & 19 \end{vmatrix} = 8. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 1.14. Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Визначник третього порядку матриці A розкладемо за допомогою алгебраїчних доповнень, наприклад за третім стовпчиком (він зручний тим, що містить найбільші елементи матриці):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \\ -3 & -2 & 7 \end{vmatrix} = 9 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} + 7 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 188. \blacktriangleright$$

Розглянемо основні властивості визначника:

1) величина визначника не зміниться, якщо його рядки та стовпчики поміняти місцями;

2) якщо переставити два рядки (чи два стовпчики) визначника, то це буде рівносильним множенню його на -1 ;

3) якщо визначник містить два однакові рядки (чи два стовпчики), то він дорівнює нулю;

4) перемноження всіх елементів одного рядка (чи одного стовпчика) визначника на будь-яке число рівносильне добутку визначника на це число.

Звідси випливає:

1) якщо елементи двох рядків (чи двох стовпчиків) пропорційні, то визначник, згідно з властивістю 3, дорівнює нулю;

2) якщо всі елементи деякого рядка (чи стовпчика) дорівнюють нулю, то визначник теж дорівнює нулю;

3) якщо до елементів деякого рядка (чи стовпчика) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (чи стовпчика), перемножені на будь-який спільний множник, то величина визначника не зміниться.

Приклад 1.15. Обчислити визначник матриці

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+2 \cdot 3 & 3 & 0 \\ 2+2 \cdot 1 & 1 & 1 \\ 1+2 \cdot 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 1.16. Знайти векторний добуток двох заданих векторів $\vec{a} \{1;0;2\}$ і $\vec{b} \{0;1;0\}$.

Розв'язання. Згідно з означенням векторного добутку маємо

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{k},$$

тобто $\vec{c} \{-2;0;1\}$. \blacktriangleright

Завдання для самостійної роботи

1. Знайдіть точку перетину двох прямих

$$2x - 4y - 29 = 0, \quad 2x + 5y + 19 = 0.$$

2. Знайдіть рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $2x - 3y - 1 = 0$ і $3x - y - 2 = 0$ перпендикулярно до прямої $y = x + 1$.

3. Запишіть рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $3x + 4y - 1 = 0$ і $3x + y - 7 = 0$ паралельно прямій $y = 2x$.

4. Знайдіть півосі, координати фокусів і ексцентриситет еліпса, якщо відомо, що еліпс проходить через точки $M_1(4; 4\sqrt{5})$ і $M_2(0; 9)$.

5. Визначте, чи перетинає пряма еліпс, дотикається до нього чи проходить поза ним:

1) $2x - y - 3 = 0$ і $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$;

2) $2x + y - 10 = 0$ і $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$;

3) $3x + 2y - 20 = 0$ і $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{10} = 1$.

У задачах 6–11 знайдіть розв'язки системи рівнянь:

6.
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5, \\ 2x - y - z = 1, \\ x + 3y + 4z = 6. \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1, \\ -3x + y + 2z = 0, \\ x + 4y + 3z = 2. \end{cases}$$

9.
$$\begin{cases} x - y + z = a, \\ x + y - z = b, \\ -x + y + z = c. \end{cases}$$

10.
$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

11.
$$\begin{cases} x - y + 2z = 2, \\ 2x - 2y + 4z = 4, \\ 3x - 3y + 6z = 3. \end{cases}$$

12. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ і } C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчисліть: 1) $A + B$; $A + C$; $B - C$; 2) AB ; BA ; AC ; CA ; BC ; CB .

13. Дано матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ і } C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчисліть: 1) $A + B$; $A + C$; $B - C$; 2) AB ; BA ; AC ; CA ; BC ; CB .

14. Знайдіть векторний добуток двох векторів:

1) $\vec{a} = \{1; -1; 1\}$ і $\vec{b} = \{1; 1; 1\}$;

2) $\vec{a} = \{1; -1; 1\}$ і $\vec{c} = \{2; 3; 4\}$;

3) $\vec{b} = \{1; 1; 1\}$ і $\vec{c} = \{2; 3; 4\}$.

У задачах 15–17, не розкриваючи визначники, доведіть справедливості рівностей:

$$15. \begin{vmatrix} \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & \cos 2\alpha \\ \sin^2 \beta & \cos^2 \beta & \cos 2\beta \\ \sin^2 \gamma & \cos^2 \gamma & \cos 2\gamma \end{vmatrix} = 0.$$

$$16. \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 + aa_2 & b_1 + ab_2 & b_1 + ab_2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$17. \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & -5 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix}.$$

У задачах 18–26 обчисліть визначники:

$$18. \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$19. \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$20. \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$21. \begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}.$$

$$22. \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & b & 0 \\ b & 0 & -b \end{vmatrix}.$$

$$23. \begin{vmatrix} -x & 1 & x \\ 0 & -x & -1 \\ x & 1 & -x \end{vmatrix}.$$

$$24. \begin{vmatrix} 12 & 6 & -4 \\ 6 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 8 \end{vmatrix}$$

$$25. \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$26. \begin{vmatrix} 1 + \cos \alpha & 1 + \sin \beta & 1 \\ 1 - \sin \alpha & 1 + \cos \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Розв'яжіть рівняння:

$$27. \begin{vmatrix} -x^2 + 2 & 4 \\ x & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

$$28. \begin{vmatrix} 2x - 1 & 3 \\ 1 & x \end{vmatrix} = -2x.$$

РОЗДІЛ 2

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

2.1. Функція однієї змінної.

Границя функції.

Неперервність функції

Нехай X та Y – деякі числові множини. *Функцією* називають множину f упорядкованих пар чисел (x, y) таких, що $x \in X$ та $y \in Y$. Тоді кажуть, що числу x ставиться у відповідність хоча б єдине число y (однозначна функція) згідно із законом $y = f(x)$, де y – значення функції, x – її аргумент. Множина X – область визначення функції, Y – множина її значень. І навпаки, якщо вказано закон $x = g(y)$, за яким кожному числу $y \in Y$ ставиться у відповідність хоча б єдине число $x \in X$, то таку функцію $g(y)$ називають оберненою до функції $f(x)$ (напр. $y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y}$ – двозначна функція).

Існують три основні способи задання функції: аналітичний (за математичною формулою), табличний (за допомогою таблиці) і графічний (відповідність між змінними x та y задається графіком).

Число A називається *границею функції* $f(x)$ у точці $x = x_0$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, що $\forall x \in X$, які задовольняють нерівність $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ (означення Коші)}. \quad (2.1)$$

Приклад 2.1. Покажемо, що функція $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$ має у точці $x_0 = 0$ границю, яка дорівнює 1.

Розв'язання. Нехай $\exists \delta > 0$, що $\forall x \in X$ $0 < |x| < \delta$. Розглянемо нерівність $|f(x) - 1| = \left| \frac{x^2}{x - 1} \right| = \frac{|x|^2}{|x - 1|} < |x| < \delta < \varepsilon$. Отже, ця нерів-

ність буде завжди виконуватися $\forall \varepsilon > \delta > 0$. Згідно з означенням Коші, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$. ►

Приклад 2.2. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2 + 2x + 4} = \frac{1}{3}. \blacktriangleright$$

Приклад 2.3. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1}$.

Розв'язання:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{2 - 0 - 0}{1 + 0} = 2. \blacktriangleright$$

Існують *дві визначні границі*:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e \approx 2,718281828... \text{ (неперове число } e).$$

Це універсальне число (фундаментальна математична константа) також можна розрахувати як суму нескінченного ряду

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots,$$

де враховано, що $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, причому за означенням $0! = 1$.

Приклад 2.4. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

$$\text{Розв'язання: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1.$$

Зауваження.

$$\lim_{x \rightarrow a} C \cdot f(x) \cdot g(x) = C \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x), \text{ де } C = \text{const.} \blacktriangleright$$

Приклад 2.5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = 2y \\ x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right| = \frac{1}{2} \left[\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} \right]^2 = \frac{1}{2}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.6. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{n}{x} \right)$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{n}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{n}{x} \right)^x = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{n}{x} \right)^x = \\ &= \left| \begin{array}{l} \frac{n}{x} = y \\ x \rightarrow \infty \Rightarrow y \rightarrow 0 \end{array} \right| = \ln \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^y = \ln \left[\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} \right]^n = \ln e^n = n. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Функція $f(x)$ називається *неперервною* у точці x_0 , якщо границя функції дорівнює її значенню у цій точці, тобто

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (2.2)$$

Точка x_0 називається *точкою розриву* функції $f(x)$, якщо $f(x)$ у точці x_0 не є неперервною. Отже, у точках розриву функція не визначена.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то вона досягає на цьому відрізку свого найбільшого (M) і найменшого (m) значення, тобто $\exists x_1, x_2 \in [a, b]$, що

$$f(x_1) = M = \sup_{[a,b]} f(x) \quad \text{і} \quad f(x_2) = m = \inf_{[a,b]} f(x). \quad (2.3)$$

2.2. Похідна функції.

Її геометричний і фізичний зміст.

Диференціал функції.

Правила диференціювання

Методи диференціального числення застосовують для вивчення біологічних процесів і явищ, коли стан системи та її властивості постійно змінюються із часом. Наприклад, якщо змінюються концентрації взаємодіючих речовин, то можна краще зрозуміти перебіг біохімічних реакцій у живій системі (метаболізм). Задача про визначення швидкості, з якою змінюється досліджувана величина, приводить до такого важливого поняття, як *похідна*.

Нехай на деякій множині X визначена функція $y=f(x)$. Візьмо будь-яку точку $x_0 \in X$ і задамо аргументу x у точці x_0 довільний приріст Δx так, щоб точка $(x_0 + \Delta x) \in X$. Тоді функція $y=f(x)$ також отримає приріст $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Похідною функції $y=f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу за $\Delta x \rightarrow 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (2.4)$$

Приклад 2.7. Знайти похідну функції $y = \sin x$ у точці x_0 .

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \Delta y &= \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 = \sin x_0 \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x_0 - \sin x_0 = \\ &= \sin x_0 (\cos \Delta x - 1) + \sin \Delta x \cos x_0 = -2 \sin x_0 \sin^2 \frac{\Delta x}{2} + \sin \Delta x \cos x_0. \end{aligned}$$

Тоді, за означенням похідної,

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x_0 \sin^2 \frac{\Delta x}{2} + \sin \Delta x \cos x_0}{\Delta x} = \\ &= \cos x_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} - \frac{1}{2} \sin x_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \right)^2 \cdot \Delta x = \\ &= \cos x_0 \cdot 1 - \frac{1}{2} \sin x_0 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 \cdot \Delta x = \cos x_0. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Нехай функція $f(x)$ визначена на деякому інтервалі (c, d) . Проведемо на графіку функції $f(x)$ дотичну до неї у точці $M(x_0, f(x_0))$ (рис. 2.1). З аналітичної геометрії відомо, що рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом k , яка лежить у координатній площині Oxy , має вигляд $y=kx+b$, де $k=\operatorname{tg}\alpha$ (α – кут нахилу прямої до осі Ox) і b – величина відрізка, який відсікає пряма на осі Oy . Отже, визначимо рівняння прямої, яка проходить через точку $M(x_0, f(x_0))$:

$$\begin{cases} y=kx+b \\ f(x_0)=kx_0+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=kx+b \\ b=f(x_0)-kx_0 \end{cases} \Rightarrow y=k(x-x_0)+f(x_0).$$

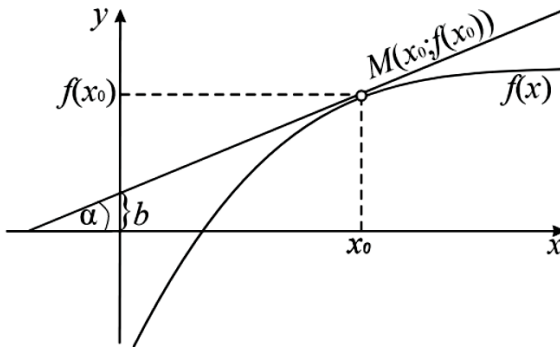


Рис. 2.1. Рівняння прямої – дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці $M(x_0, f(x_0))$: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, де $f'(x_0)=k=\operatorname{tg}\alpha$ і $b=f(x_0)-f'(x_0)x_0$

Розглянемо таку границю:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{y(x_0 + \Delta x) - y(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k(x_0 + \Delta x - x_0) + f(x_0) - k(x_0 - x_0) - f(x_0)}{\Delta x} = \quad (2.5) \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k \Delta x}{\Delta x} = k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0). \end{aligned}$$

Похідна функції $f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка цієї функції у точці з координатами $(x_0, f(x_0))$ (*геометричний зміст похідної*).

Нехай функція $s(t)$ описує закон руху матеріальної точки M . Тоді $y = s(t_0)$ – шлях, який пройшла точка M за час t_0 . За проміжок часу $\Delta t = t - t_0$ точка M пройде шлях $\Delta y = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$. Тоді границя $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = s'(t_0) = v(t_0)$ визна-

чає миттєву швидкість матеріальної точки в момент часу t_0 (*фізичний зміст похідної*).

Якщо функція $y = f(x)$ має в точці x_0 скінченну похідну, то кажуть, що вона *диференційована* у цій точці й неперервна в ній,

причому $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, де величини $dy \approx \Delta y$ і $dx = \Delta x$ називають

диференціалами функції $y = f(x)$ і незалежної змінної x , відповідно. Таким чином, знайти диференціал функції $y = f(x)$ у деякій точці x означає знайти похідну функції в цій точці й домножити її на dx , тобто

$$dy = f'(x)dx. \quad (2.6)$$

Зауваження 1. Якщо функція $N(t)$ визначає залежність чисельності популяції від часу, то її похідна $\frac{dN}{dt} = N'$ – це швидкість зміни популяції, а її диференціал $dN = N'dt$ – зміна чисельності популяції за деякий короткий проміжок часу dt .

Якщо функції $u(x)$ і $v(x)$ диференційовані в точці x , то справедливі такі *формули диференціювання*:

$$\begin{aligned} (Cu)' &= Cu'; \\ (u \pm v)' &= u' \pm v'; \\ (u \cdot v)' &= u'v + v'u; \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Якщо складна функція $y = f(h(x))$ має похідну в точці x_0 , то справедлива формула

$$y'(x_0) = f'(x_0) \cdot h'(x_0). \quad (2.8)$$

Нехай функція $x=g(y)$ є оберненою функцією для функції $y=f(x)$, яка має похідну в точці x_0 ; тоді справедлива формула

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (2.9)$$

Наведемо таблицю похідних елементарних функцій:

1) $C' = 0$;

2) $(x^n)' = nx^{n-1}$ (степенева функція);

3) $(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e$ (логарифмічна функція), $(\ln x)' = \frac{1}{x}$;

4) $(a^x)' = a^x \ln a$ (показникова функція), $(e^x)' = e^x$;

5) $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$,

$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ (тригонометричні функції);

6) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,

$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ (обернені тригонометричні функції).

Приклад 2.8. Знайти похідну функції

$$y = 10x^4 - 3x^2 + 5x - 100.$$

Розв'язання:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(10x^4) - \frac{d}{dx}(3x^2) + \frac{d}{dx}(5x) - \frac{d}{dx}(100) = 40x^3 - 6x + 5. \blacktriangleright$$

Приклад 2.9. Знайти похідну функції

$$y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 3}.$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 + 2x - 1)'(x - 3) - (x - 3)'(x^2 + 2x - 1)}{(x - 3)^2} = \\ &= \frac{(2x + 2)(x - 3) - (x^2 + 2x - 1)}{(x - 3)^2} = \frac{2x^2 - 4x - 6 - x^2 - 2x + 1}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 5}{(x - 3)^2}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.10. Знайти похідну функції $y = \ln x^2$.

Розв'язання. Тут $f(x) = \ln x^2$ (логарифмічна зовнішня функція), а $h(x) = x^2$ (степенева внутрішня функція). За правилом диференціювання складної функції маємо:

$$y'(x) = (\ln x^2)' \cdot (x^2)' = \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x}. \blacktriangleright$$

Приклад 2.11. Знайти похідну функції $y = \cos^3 2x$.

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{aligned} y' &= (\cos^3 2x)' = 3\cos^2 2x \cdot (\cos 2x)' = \\ &= 3\cos^2 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot (2x)' = -6\cos^2 2x \cdot \sin 2x. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.12. Обчислити похідну функції $y = \arcsin \sqrt{1-x^2}$ за $0 < x < 1$.

Розв'язання. За правилом диференціювання складної функції маємо ($h = \sqrt{1-x^2}$):

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \cdot h'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) = \\ &= -\frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.13. Обчислити похідну $y = x^x$.

Розв'язання. Спочатку зобразимо цю функцію в експоненціальній формі: $y = e^{x \ln x}$. Після цього обчислимо похідну за відповідними правилами диференціювання ($h = x \ln x$):

$$\begin{aligned} y' &= e^h \cdot h'(x) = x^x \cdot [x' \ln x + x(\ln x)'] = \\ &= x^x \left[\ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right] = x^x [\ln x + 1]. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.14. Кількість цукру x , що інвертувала за час t , визначається за формулою $x = a(1 - e^{-kt})$, де a – початкова кількість цукру в розчині, k – стала величина. Визначити залежність швидкості інверсії сахарози від величини x .

Розв'язання. Швидкість реакції (інверсії сахарози) v – це похідна величини x за часом: $v = \frac{dx}{dt} = ake^{-kt}$. Функцію e^{-kt} знайдемо з вихідної формули для величини x , $e^{-kt} = \frac{a-x}{a}$, і підставимо в одержане рівняння для швидкості реакції: $v(x) = k(a-x)$. ►

2.3. Правило Лопітала. Похідні вищих порядків

Кажуть, що відношення двох функцій $\frac{f(x)}{g(x)}$ за $x \rightarrow x_0$ є невизначеністю вигляду $\frac{0}{0}$ або $\frac{\infty}{\infty}$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ або $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$, відповідно.

Розкрити ці невизначеності, тобто обчислити $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, надає можливість *правило Лопітала*: якщо існує границя відношення похідних $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (скінченна або нескінченна), то існує і границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, причому справедлива формула

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (2.10)$$

Функція $f'(x)$ називається *похідною першого порядку* функції $f(x)$. Похідна від похідної функції $f'(x)$ називається *похідною другого порядку* цієї функції: $f''(x)$. Похідні, починаючи з другої, називаються *похідними вищих порядків*: $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$, ..., $f^{(n)}(x)$. Отже, похідна n -го порядку $f^{(n)}(x)$ – це похідна від похідної $(n-1)$ -го порядку.

Зауваження 1. У механіці похідна другого порядку від функції $s(t)$, яка описує траєкторію руху матеріальної точки, має фізичний зміст, а саме визначає прискорення точки в момент часу t_0 : $s''(t_0) = (s'(t_0))' = v'(t_0) = a(t_0)$.

Зауваження 2. Якщо похідні функцій $f'(x)$ і $g'(x)$ задовольняють ті самі вимоги, що й самі функції $f(x)$ і $g(x)$ за $x \rightarrow x_0$, то правило Лопітала можна застосувати повторно.

Приклад 2.15. Обчислити $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{3x^2} = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{6x} &= -\frac{1}{6} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = -\frac{1}{6}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.16. Обчислити $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n(n-1)(n-2)x^{n-3}}{e^x} = \dots \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n!}{e^x} = n! \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0. \blacktriangleright \end{aligned}$$

2.4. Формула Тейлора

Ряд вигляду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \quad (2.11)$$

називається *степеневим рядом*. Числа $a_n \forall n$ називаються коефіцієнтами ряду (2.11).

Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 і деякому її околі похідні порядку $n + 1$. Це означає, що функція $f(x)$ та її похідні до порядку n включно неперервні й диференційовані в цьому околі. Тоді справедлива *формула Тейлора*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_{n+1}(x) = \\ &= \sum_{m=0}^n \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x - x_0)^m + R_{n+1}(x), \end{aligned} \quad (2.12)$$

де $R_{n+1}(x)$ – деякий залишковий член, причому $R_{n+1}(x) \rightarrow 0$ за $n \rightarrow \infty$.

Отже, формула Тейлора дає можливість розкласти функцію $f(x)$ у степеневий ряд в околі деякої точки x_0 з відповідними коефіцієнтами $a_m = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$.

Зауваження. Формулою Маклорена називають формулу Тейлора (2.12) за $x_0 = 0$.

Приклад 2.17. Розкласти функцію $y = e^x \cos x$ у ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 2$ з точністю до квадратичного члена.

Розв'язання. Знаходимо спочатку похідні першого й другого порядків від цієї функції:

$$y' = e^x \cos x - e^x \sin x = e^x (\cos x - \sin x) \quad \text{та}$$

$$y'' = e^x (\cos x - \sin x) - e^x (\sin x + \cos x) = -2e^x \sin x.$$

Далі обчислюємо значення вихідної функції та одержаних її похідних у точці $x_0 = 2$:

$$y(2) = e^2 \cos 2, \quad y'(2) = e^2 (\cos 2 - \sin 2) \quad \text{та}$$

$$y''(2) = -2e^2 \sin 2.$$

Нарешті запишемо шуканий ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} y(x) &= e^2 \cos 2 + e^2 (\cos 2 - \sin 2)(x - 2) - e^2 \sin 2 (x - 2)^2 + \dots = \\ &= e^2 \{ \cos 2 + (\cos 2 - \sin 2)(x - 2) - \sin 2 (x - 2)^2 + \dots \}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.18. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3 \sin x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Розкладемо функції

$\cos x$, $e^{-\frac{x^2}{2}}$ та $\sin x$ у ряд Маклорена з необхідною точністю:

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \dots + e^{-\frac{x^2}{2}} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \dots \\ &+ \sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots \end{aligned}$$

Тоді маємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^3 \sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} - 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^6}{48}}{x^3 \left(x - \frac{x^3}{6} \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{x^4}{12} + \frac{7}{360}x^6}{x^4 - \frac{x^6}{6}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{12} + \frac{7}{360}x^2}{1 - \frac{x^2}{6}} = \frac{-\frac{1}{12} + 0}{1 - 0} = -\frac{1}{12}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.19. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Розкладемо функцію

$(1+x)^n$ у ряд Маклорена: $(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1!}x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$

У результаті отримуємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^n - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - 1}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(n + \frac{n-1}{2}x \right) = n. \blacktriangleright \end{aligned}$$

2.5. Дослідження функцій на екстремум. Асимптоти графіків функцій

За допомогою похідних можна визначити проміжки монотонності (зростання або спадання) і точки екстремуму (максимальне або мінімальне значення) функції на деякому інтервалі (a, b) .

Достатня ознака монотонності. Розглянемо функцію $y=f(x)$, яка диференційована на інтервалі (a, b) . Якщо у кожній точці цього інтервалу виконується нерівність $y' = f'(x) > 0$, то ця функція є зростаючою. І навпаки, якщо виконується нерівність $y' = f'(x) < 0$, то функція є спадною.

Необхідна умова існування екстремуму. Якщо функція $y=f(x)$ має в точці $x_0 \in (a, b)$ екстремум, то її похідна в цій точці дорівнює нулю:

$$y' = f'(x_0) = 0.$$

Достатня умова існування екстремуму. Якщо похідна функції $y=f(x)$ дорівнює нулю в точці $x_0 \in (a, b)$, тобто $y' = f'(x_0) = 0$, і при переході через цю точку значення похідної змінює знак із "+" ($f'(x < x_0) > 0$) на "-" ($f'(x > x_0) < 0$) (або з "-" на "+"), то функція $y=f(x)$ має екстремум у точці x_0 , а саме максимум (досягає максимального значення) або мінімум (досягає мінімального значення).

Зауваження 1. Точка x_0 називається *точкою перегину*, якщо $f''(x_0) = 0$ і $f''(x)$ мають різні знаки ліворуч і праворуч від точки x_0 .

Приклад 2.20. Чисельність популяції бактерій із часом змінюється за законом $N(t) = N_0 \left(1 + \frac{t}{a+t^2} \right)$, де N_0 – початкова кількість бактерій у популяції та a – деяка константа. Знайти максимальну чисельність популяції бактерій, якщо $N_0 = 1000$ і $a = 400$.

Розв'язання. Знайдемо похідну:

$$N' = N_0 \frac{a+t^2-2t^2}{(a+t^2)^2} = N_0 \frac{a-t^2}{(a+t^2)^2}.$$

Прирівняємо її до нуля і знайдемо точки екстремуму: $t = \sqrt{a} = 20$ (змісту задачі відповідає лише одна додатна точка). У цій точці функція має максимум, оскільки при $t < 20$ $N' > 0$ функція зростає ("+"), а при $t > 20$ $N' < 0$ спадає ("-"). Максимальна чисельність популяції бактерій становить

$$N(t = 20) = 1000 \left(1 + \frac{20}{400 + 400} \right) = 1025. \blacktriangleright$$

Приклад 2.21. Загальна енергія пори мембрани як функція її радіуса описується рівнянням

$$E(r) = 2\pi r\gamma - \pi r^2\sigma,$$

де перший доданок визначає енергією краю пори з лінійним натягом γ , а другий – енергію пори з поверхневим натягом σ . Дослідимо цю функцію на екстремум:

$$\frac{dE}{dr} = 0 \Rightarrow 2\pi\gamma - 2\pi\sigma r = 0 \Rightarrow r^* = \frac{\gamma}{\sigma}.$$

У цій точці функція $E(r)$ має максимум, $E\left(r = r^* = \frac{\gamma}{\sigma}\right) = \frac{\pi\gamma^2}{\sigma}$,

оскільки при $r < r^*$ $E' > 0$ функція зростає, наприклад у точці

$$r = \frac{\gamma}{2\sigma} \quad E'\left(\frac{\gamma}{2\sigma}\right) = \frac{3}{2}\pi\gamma > 0, \text{ а при } r > r^* \quad E' < 0, \text{ наприклад у точці}$$

$$r = \frac{2\gamma}{\sigma} \quad E'\left(\frac{2\gamma}{\sigma}\right) = -2\pi\gamma < 0, \text{ вона спадає.}$$

Фізично це означає, що поява пор із радіусом $r > r^*$ буде супроводжуватися розривом мембрани внаслідок необмеженого розширення пори. Навпаки, за $r < r^*$ пора буде стискатися і стабільність мембрани збережеться.

Приклад 2.22. Дослідити функцію $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ на екстремум.

Розв'язання. Знаходимо похідну і прирівнюємо її до нуля:

$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1 = 0$. Отже, точками екстремуму є $x_1 = -\frac{1}{3}$ та $x_2 = 1$. Позначивши їх на осі x (рис. 2.2), дослідимо в її верхній

частині знак похідної функції $f'(x)$ в околі цих точок екстремуму, а в її нижній частині – інтервали монотонності цієї функції. У результаті маємо:

- на інтервалі $(-\infty; -\frac{1}{3})$ $f'(x) > 0$ (функція $f(x)$ зростає);
- на інтервалі $(-\frac{1}{3}; 1)$ $f'(x) < 0$ (функція $f(x)$ спадає);
- на інтервалі $(1; +\infty)$ $f'(x) > 0$ (функція $f(x)$ знову зростає).

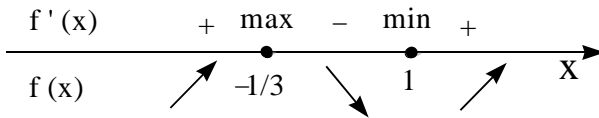


Рис. 2.2. Дослідження функції $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ на екстремум

Отже, функція $f(x)$ у точці $x = -\frac{1}{3}$ має локальний максимум ($f_{\max}(-\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$), а у точці $x = 1$ – локальний мінімум ($f_{\min}(1) = 0$).

Дослідимо, чи має ця функція точку перегину. Для цього знайдемо другу похідну та порівняємо її до нуля:

$$f''(x) = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3}.$$

З рис. 2.3 видно, що $f''(x)$ має різні знаки ліворуч і праворуч від точки $x_3 = \frac{1}{3}$, отже, ця точка є точкою перегину функції $f(x)$ ($f_{\text{пер}}(\frac{1}{3}) = \frac{16}{27}$). Дійсно, $f''(-\frac{1}{3}) = -4 < 0$ і $f''(1) = 4 > 0$. Її схематичний графік наведено на рис. 2.4. ►

При дослідженні поведінки функції на нескінченності та поблизу точок розриву (невизначеності) часто виявляється, що графік функції як завгодно близько наближається до тієї чи ін-

шої прямої. Такі прямі називають *асимптотами*. Існують три види асимптот: вертикальні, горизонтальні ц нахилені.

Пряма $\tilde{y} = kx + b$ називається *нахиленою асимптотою* графіка функції $f(x)$ за $x \rightarrow +\infty$ (або $x \rightarrow -\infty$), де

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx]. \quad (2.13)$$

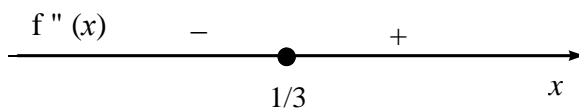


Рис. 2.3. Дослідження функції $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$ на перегин

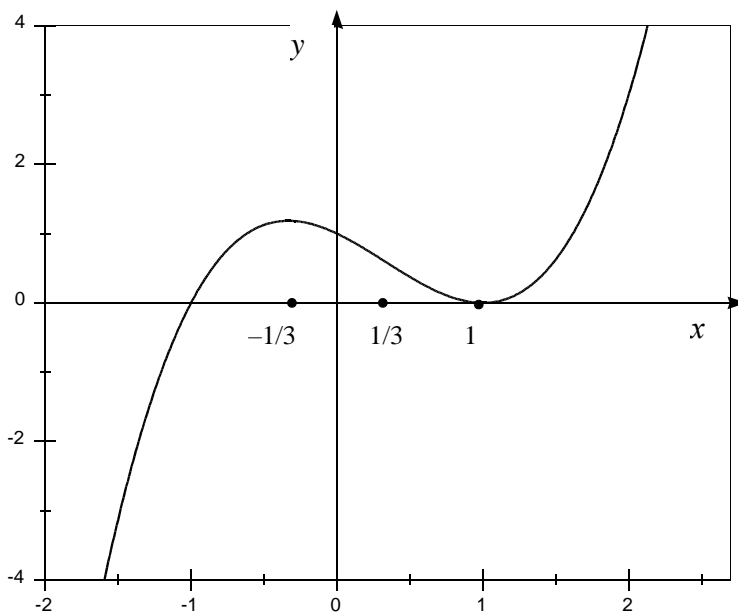


Рис. 2.4. Графік функції $f(x) = x^3 - x^2 - x + 1$

Якщо коефіцієнт $k = 0$, то така асимптота називається *горизонтальною* ($\tilde{y} = b$).

Пряма $x = x_0$ називається *вертикальною асимптотою* графіка функції $f(x)$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \rightarrow +\infty$ (або $-\infty$).

Приклад 2.23. Знайти асимптоти графіка функції

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x}.$$

Розв'язання. За формулою (2.13) знаходимо коефіцієнти k і b нахиленої асимптоти:

$$\begin{aligned} k &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 2, \\ b &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} [f(x) - kx] = \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left[\frac{2x^2 + x - 1}{x} - 2x \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left[1 - \frac{1}{x} \right] = 1. \end{aligned}$$

Отже, пряма $\tilde{y} = 2x + 1$ є нахиленою асимптотою графіка функції $f(x)$ як за $x \rightarrow +\infty$, так і за $x \rightarrow -\infty$. Оскільки $k \neq 0$, то горизонтальних асимптот немає.

Нарешті, точка $x = 0$ є точкою розриву функції $f(x)$, причому

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[2x + 1 - \frac{1}{x} \right] = -\infty.$$

Отже, пряма $x = 0$ (вісь ординат) є вертикальною асимптотою функції $f(x)$, схематичний графік якої показано на рис. 2.5. ►

Наведемо загальну схему для побудови графіка функції $y = f(x)$.

1. Знайти область визначення функції.
2. Знайти точки перетину графіка функції з віссю ординат (покласти у формулі, яка задає функцію, $x = 0$) і віссю абсцис (розв'язати рівняння $f(x) = 0$).
3. Знайти асимптоти функції.
4. Дослідити функцію на екстремум: знайти точки мінімуму, максимуму, а також перегину. Обчислити значення функції у цих точках. Установити ділянки монотонності функції.

5. Побудувати схематичний графік функції $y=f(x)$.

При побудові графіка важливо врахувати його симетрію. Для цього корисно перевірити функцію на парність (непарність).

Зауваження 2. Функцію $f(x)$ називають *парною* (або *непарною*), якщо виконується умова $f(-x)=f(x)$ (або $f(-x)=-f(x)$).

Зауваження 3. Функцію $f(x)$ називають *періодичною*, якщо виконується умова $f(x+T)=f(x)$, де T – період функції $f(x)$.

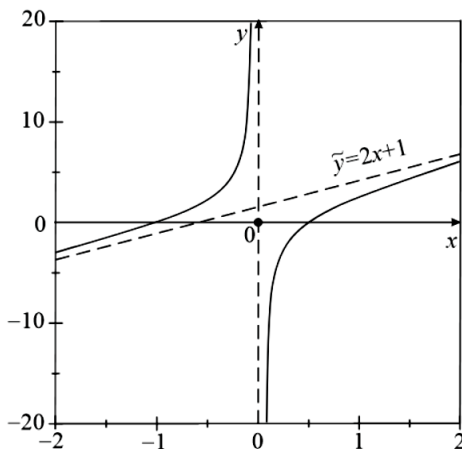


Рис. 2.5. Графік функції $f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x}$

Приклад 2.24. Побудувати графік функції

$$y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}.$$

Розв'язання. Згідно з наведеною вище схемою маємо таке.

1. Область визначення функції $x \in (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$ (точка $x=1$ є точкою розриву).

2. Графік цієї функції перетинає вісь ординат у точці $y=-2$ (за $x=0$). Оскільки рівняння $x^2 + 2 = 0$ не має дійсних коренів, то графік функції взагалі не перетинає вісь абсцис.

3. Дослідимо поведінку функції поблизу точки розриву $x = 1$.

Маємо: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2}{x - 1} \rightarrow +\infty$. Отже, пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою. За формулами (2.13) знаходимо:

$$k = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{x^2 + 2}{x(x-1)} = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{1 + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x}} = 1,$$

$$b = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left[\frac{x^2 + 2}{x - 1} - x \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \left[\frac{2 + x}{x - 1} \right] = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ (x \rightarrow -\infty)}} \frac{1 + \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 1.$$

Таким чином, пряма $\tilde{y} = x + 1$ є нахиленою асимптотою цієї функції. Горизонтальних асимптот немає.

4. Знайдемо першу похідну функції і прирівняємо її до нуля:

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{2x(x-1) - (x^2 + 2)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 - \sqrt{3} \\ &\quad \text{і} \quad x_2 = 1 + \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Позначивши ці точки на осі x (рис. 2.6), дослідимо їх на екстремум.

Отже, $x_1 = 1 - \sqrt{3}$ є точкою максимуму, $y(1 - \sqrt{3}) = 2(1 - \sqrt{3})$, а $x_2 = 1 + \sqrt{3}$ – точкою мінімуму, $y(1 + \sqrt{3}) = 2(1 + \sqrt{3})$. Функція зростає на інтервалах $(-\infty; 1 - \sqrt{3})$ та $(1 + \sqrt{3}; +\infty)$ і спадає на інтервалі $(1 - \sqrt{3}; -1) \cup (-1; 1 + \sqrt{3})$.

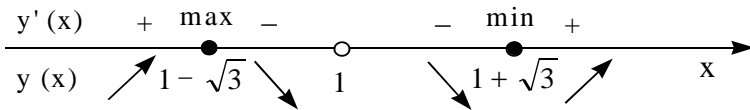


Рис. 2.6. Дослідження функції $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ на екстремум

З'ясуємо, чи має ця функція точку перегину. Знайдемо її другу похідну:

$$y''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2 - 2x - 2)}{(x-1)^4} = \frac{6}{(x-1)^3} \neq 0.$$

Отже, точок перегину функція не має.

5. Досліджувана функція не є парною і не є непарною.

Схематичний графік шуканої функції наведено на рис. 2.7.

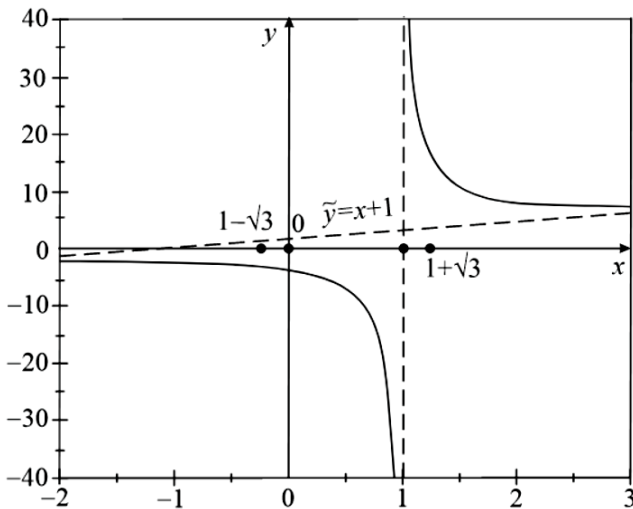


Рис. 2.7. Графік функції $y = \frac{x^2 + 2}{x - 1}$ ►

Приклад 2.25. Побудувати графік функції

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

де m і σ – деякі константи (крива Гаусса).

Розв'язання. Функція визначена й неперервна на всій числовій прямій, причому

$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{m^2}{2\sigma^2}}$$

та $f(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$ (горизонтальна асимптота).

Знайдемо похідну функції: позначимо

$$u(x) = -\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2},$$

тоді

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \frac{d}{du} (e^u) u' = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left(-\frac{x-m}{\sigma^2} \right) = -\frac{x-m}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}. \end{aligned}$$

Прирівнявши її до нуля ($f'(x) = 0$), знаходимо точку екстремуму: $x = m$. У цій точці функція має максимум, оскільки при $x < m$ $f' > 0$ вона зростає, а при $x > m$ $f' < 0$ спадає.

Максимальне значення функції становить

$$f(x = m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}.$$

Також у точках $x = m \pm \sigma$ функція має перегин:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^3}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left[\frac{(x-m)^2}{\sigma^2} - 1 \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^5}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} (x-m-\sigma) \cdot (x-m+\sigma) = 0, \end{aligned}$$

причому

$$f(m \pm \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi e\sigma}}.$$

Схематичний графік шуканої функції наведено на рис. 2.8.

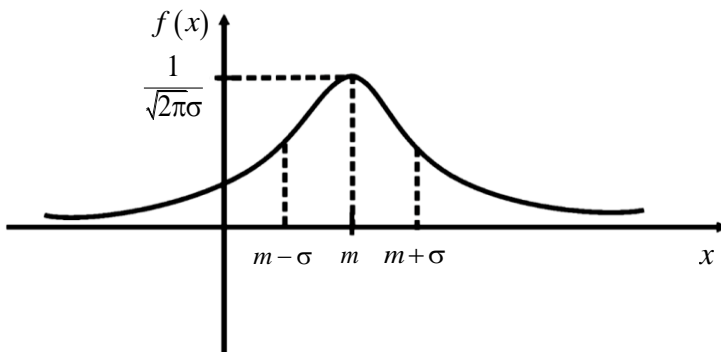


Рис. 2.8. Графік функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ ►

2.6. Функція двох змінних.

Частинні похідні.

Екстремум функції двох змінних (метод найменших квадратів)

Нехай задано закон $z=f(x, y)$, за яким кожній упорядкованій парі незалежних змінних (x, y) ставиться у відповідність хоча б одне число z . Число z називають значенням функції f у точці (x, y) .

Приклад 2.26. Розглянемо функцію двох змінних

$$z(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

Областю визначення цієї функції є множина всіх точок, які задовольняють нерівність

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1$$

(рівняння кола радіусом 1 із центром у початку координат). Множиною значень функції є відрізок $[0; 1]$.

Нехай функція $z=f(M)$ визначена в деякому околі точки $M(x, y)$. Тоді частинна похідна цієї функції за змінною x (або y) визначається як звичайна похідна функції однієї змінної x

(або y) за фіксованого значення змінної y (або x) і позначається так (частинна похідна першого порядку): $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x$ (або $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y$).

Приклад 2.27. Знайти частинні похідні першого порядку від функції $z(x, y) = \arccos \frac{x}{y}$.

Розв'язання

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{y} \cdot (x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \frac{1}{y}; \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot x \cdot \left(\frac{1}{y}\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{y}\right)^2}} \cdot \frac{x}{y^2}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.28. Знайти частинні похідні першого і другого порядків функції $z(x, y) = x^2 + y^3 - 5xy$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} z'_x &= \frac{\partial z}{\partial x} \Big|_{y=\text{const}} = 2x - 5y, \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{x=\text{const}} = 3y^2 - 5x, \\ z''_{xx} &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{y=\text{const}} = 2, \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{x=\text{const}} = 6y, \\ z''_{xy} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Big|_{x=\text{const}} \right) \Big|_{y=\text{const}} = z''_{yx} = -5. \end{aligned}$$

Зауваження. Похідні $z''_{xy} = z''_{yx}$ називаються змішаними частинними похідними. \blacktriangleright

Приклад 2.29. Знайти частинні похідні другого порядку від функції $z(x, y) = y^2 \sin x$.

Розв'язання. Для цього знайдемо спочатку частинні похідні першого порядку: $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = y^2 \cos x$; $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = 2y \sin x$.

Далі отримуємо:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= z''_{xx} = -y^2 \sin x; & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= z''_{yy} = 2 \sin x; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (y^2 \cos x) = 2y \cos x; \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (2y \sin x) = 2y \cos x = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx}.\end{aligned}$$

Нехай функція $z=f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$. Тоді функція $z=f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум, якщо її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю (*необхідна умова екстремуму*):

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M_0} = z'_x(x_0, y_0) = 0 \\ \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M_0} = z'_y(x_0, y_0) = 0. \end{cases} \quad (2.14)$$

Нехай у точці $M_0(x_0, y_0)$ можливого екстремуму й деякому її околі функція $z=f(x, y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку. Побудуємо такий визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx}(x_0, y_0) & z''_{xy}(x_0, y_0) \\ z''_{yx}(x_0, y_0) & z''_{yy}(x_0, y_0) \end{vmatrix}. \quad (2.15)$$

Тоді (*достатня умова екстремуму*):

1) якщо $\Delta > 0$, то в точці M_0 функція має екстремум, причому за $z''_{xx}(x_0, y_0) > 0$ – *локальний мінімум*, а за $z''_{xx}(x_0, y_0) < 0$ – *локальний максимум*;

2) якщо $\Delta < 0$, то в точці M_0 функція не має екстремуму;

3) якщо $\Delta = 0$, то в точці M_0 функція може мати, а може й не мати екстремуму (потрібні додаткові дослідження). ►

Приклад 2.30. Дослідити на екстремум функцію

$$z(x, y) = e^{2y} (x^2 + 3y).$$

Розв'язання. Знаходимо точку можливого екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{2y} = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2e^{2y} + 3e^{2y} + 6ye^{2y} = e^{2y}(2x^2 + 3 + 6y) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Далі знайдемо частинні похідні другого порядку цієї функції та їхні значення у точці можливого екстремуму:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{y=\text{const}} = 2e^{2y} \Big|_{y=y_0=-\frac{1}{2}} = \frac{2}{e},$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{x=\text{const}} = 4x^2e^{2y} + 12e^{2y} + 12ye^{2y} \Big|_{\substack{x_0=0 \\ y_0=-\frac{1}{2}}} = \frac{6}{e},$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Big|_{x=\text{const}} \right) \Big|_{y=\text{const}} =$$

$$= z''_{yx} = 4xe^{2y} \Big|_{\substack{x_0=0 \\ y_0=-\frac{1}{2}}} = 0.$$

Обчислимо визначник (2.15): $\Delta = \begin{vmatrix} 2/e & 0 \\ 0 & 6/e \end{vmatrix} = \frac{12}{e^2} > 0.$

Оскільки $\Delta > 0$ і $z''_{xx} = \frac{2}{e} > 0$, то в точці $M_0(0, -\frac{1}{2})$ досліджувана функція матиме локальний мінімум. ►

Приклад 2.31. Дослідити на екстремум функцію

$$z(x, y) = 2y^2 + xy + x^2 - x - y.$$

Розв'язання. Знаходимо точку можливого екстремуму:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = y + 2x - 1 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 4y + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 4(1 - 2x) + x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 1 - 2x \\ 3 - 7x = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = \frac{3}{7}, y_0 = \frac{1}{7}.$$

Далі знайдемо частинні похідні другого порядку цієї функції:

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \Big|_{y=\text{const}} = 2, \quad z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \Big|_{x=\text{const}} = 4,$$

$$z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \Big|_{x=\text{const}} \right) \Big|_{y=\text{const}} = z''_{yx} = 1.$$

Як бачимо, значення частинних похідних другого порядку досліджуваної функції не залежать від точки можливого екстремуму.

Обчислимо визначник (2.15):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0.$$

Оскільки $\Delta > 0$ і $z''_{xx} = 2 > 0$, то в точці $M_0(\frac{3}{7}, \frac{1}{7})$ функція матиме локальний мінімум. ►

Приклад 2.32. Дослідити на екстремум функцію

$$z(x, y) = 2x^4 + y^4.$$

Розв'язання. Маємо:

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 8x^3 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 0, y_0 = 0.$$

У точці $M_0(0; 0)$ $z''_{xx} = 0$ і $\Delta = 0$. Отже, у цій точці екстремум може існувати, а може й не існувати. У нашому випадку екстремум існує, оскільки $z > 0$ у всіх точках, за винятком точки M_0 (функція зростає ліворуч і праворуч від точки M_0), і $z = 0$ у точці M_0 , тобто функція у цій точці має локальний мінімум. ►

Приклад 2.33. За розташованими на координатній площині n експериментальними точками $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ установити вигляд функції $y = f(x)$, яка б якнайкраще описувала ці експериментальні значення (*задача інтерполяції*).

Розв'язання. Розглянемо, наприклад, задачу лінійної інтерполяції:

$$y = kx + b.$$

Зрозуміло, що така формула є наближеною.

Тому, підставляючи значення координат експериментальних точок $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ у цей вираз, отримуємо рівності

$$\begin{cases} y_1 - (kx_1 + b) = \delta_1, \\ \vdots \\ y_n - (kx_n + b) = \delta_n, \end{cases}$$

де $\delta_1, \dots, \delta_n$ – деякі похибки (відхилення). Отже, задача полягає в тому, що необхідно підібрати такі коефіцієнти k і b , щоб похибки були якнайменшими за абсолютною величиною (мінімальними). Для цього використаємо *метод найменших квадратів*.

Розглянемо суму квадратів похибок:

$$S(k, b) = \sum_{i=1}^n [y_i - (kx_i + b)]^2 = \sum_{i=1}^n \delta_i^2.$$

Наша задача зводиться до знаходження таких коефіцієнтів k_0 і b_0 , за яких функція $S(k, b)$ має мінімум:

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial k} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (kx_i + b)] x_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n [y_i - (kx_i + b)] = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad (2.16)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sum_{i=1}^n y_i x_i = k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n y_i = k \sum_{i=1}^n x_i + bn. \end{cases}$$

Отримана система (2.16) називається *нормальною системою методу найменших квадратів*. Із цієї системи знаходимо невідомі коефіцієнти k_0 та b_0 і, відповідно, шукане рівняння прямої $y = k_0 x + b_0$.

Нарешті, легко показати, що функція $S(k, b)$ має локальний мінімум у точці $M_0(k_0, b_0)$. Дійсно,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial k^2} = 2 \sum_{i=1}^n x_i^2 > 0 \quad \text{і}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2 S}{\partial k^2} \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 S}{\partial k \partial b} \right)^2 = 4n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(2 \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 =$$

$$= 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_i - x_j)^2 > 0.$$

Як приклад розглянемо можливу лінійну залежність між такими дослідними даними:

x_i	1	3	5	7	9
y_i	0,48	1,26	2,85	3,96	5,15

Запишемо систему алгебраїчних рівнянь (2.16) у розгорнутій формі та знайдемо невідомі параметри задачі лінійної інтерполяції k_0 і b_0 :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^5 y_i x_i = k \sum_{i=1}^5 x_i^2 + b \sum_{i=1}^5 x_i \\ \sum_{i=1}^5 y_i = k \sum_{i=1}^5 x_i + 5b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0,48 + 3,78 + 14,25 + 27,72 + 46,35 = \\ = k(1 + 9 + 25 + 49 + 81) + b(1 + 3 + 5 + 7 + 9) \\ 0,48 + 1,26 + 2,85 + 3,96 + 5,15 = k(1 + 3 + 5 + 7 + 9) + 5b \end{cases}$$

$$+ \begin{cases} 92,58 = 165k + 25b \\ 13,7 = 25k + 5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 92,58 = 165k + 25b \\ 68,5 = 125k + 25b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 24,08 = 40k \\ 13,7 = 25k + 5b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_0 = 0,602 \\ b_0 = -0,27. \end{cases}$$

Отже, шукане рівняння прямої $y = 0,602x - 0,27$ (рис. 2.9).

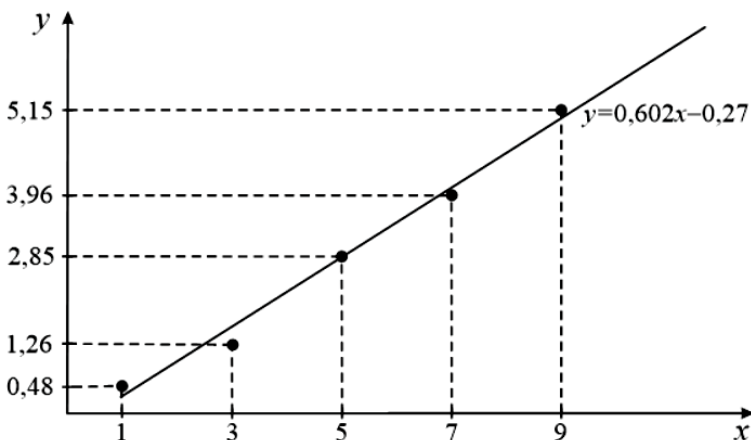


Рис. 2.9. Задача лінійної інтерполяції експериментальних даних (позначені чорними кружками) ►

2.7. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування функцій

Функція $F(x)$ називається *первісною* для функції $f(x)$ на деякому проміжку X , якщо $\forall x \in X$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.

Зауваження. Первісна $F(x)$ для функції $f(x)$ визначається з точністю до деякої довільної сталої C , оскільки

$$(F(x) + C)' = F'(x) = f(x).$$

Множину функцій $F(x) + C$ називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на проміжку X і позначають так:

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (2.17)$$

Отже, інтегрування – це операція, обернена до диференціювання. Наведемо *таблицю основних інтегралів*:

$$1) \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1);$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$$

$$3) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$4) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C;$$

$$5) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C;$$

$$6) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (0 < a \neq 1),$$

$$\int e^x dx = e^x + C;$$

$$7) \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$8) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Обчислити інтеграл означає звести його до табличного за допомогою тих чи інших методів.

Приклад 2.34. *Безпосереднє інтегрування* виконують із використанням таблиці основних інтегралів.

Обчислимо інтеграл

$$\int (3x^3 + 2x - 1) dx.$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} & \int (3x^3 + 2x - 1) dx = \\ & = 3 \int x^3 dx + 2 \int x dx - \int x^0 dx = \frac{3}{4} x^4 + x^2 - x + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.35. Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx &= \int \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1} dx = \\ &= \int dx - 2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = x - 2 \operatorname{arctg} x + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.36. Метод заміни змінної (підстановки).

Обчислити інтеграл $\int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx$.

Розв'язання. У підінтегральній функції зробимо заміну: $x - 1 = t \Rightarrow x = t + 1$. Вважаючи, що x і t – незалежні змінні, установе зв'язок між їхніми диференціалами: $dx = dt$. У результаті отримаємо (користуючись таблицею основних інтегралів):

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x-1)^3} dx &= \int \frac{(t+1)^2}{t^3} dt = \int \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{t^2} + \frac{1}{t^3} \right) dt = \\ &= \ln|t| - \frac{2}{t} - \frac{1}{2t^2} + C = \ln|x-1| - \frac{2}{x-1} - \frac{1}{2(x-1)^2} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.37. Обчислити інтеграл $\int \cos^3 x \sin x dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int \cos^3 x \sin x dx &= \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x dx = dt \end{array} \right| = \\ &= -\int t^3 dt = -\frac{t^4}{4} + C = -\frac{\cos^4 x}{4} + C. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.38. Обчислити інтеграл $\int \frac{x+1}{x^2 + 4x + 9} dx$.

Розв'язання:

$$\int \frac{x+1}{x^2 + 4x + 9} dx = \int \frac{x+1}{(x+2)^2 + 5} dx = \frac{1}{5} \int \frac{x+1}{1 + \left(\frac{x+2}{\sqrt{5}} \right)^2} dx =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \begin{array}{l} \frac{x+2}{\sqrt{5}} = t \Rightarrow x = \sqrt{5}t - 2 \\ dx = \sqrt{5} dt \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{\sqrt{5}t - 1}{1+t^2} dt = \int \frac{t}{1+t^2} dt - \frac{1}{\sqrt{5}} \int \frac{dt}{1+t^2} = \\
&= \left| \begin{array}{l} 1+t^2 = y \\ 2t dt = dy \Rightarrow t dt = \frac{1}{2} dy \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int \frac{dy}{y} - \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg t = \frac{1}{2} \ln |1+t^2| - \\
&-\frac{1}{\sqrt{5}} \arctg t + C = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \left(\frac{x+2}{\sqrt{5}} \right)^2 \right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \arctg \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C. \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Приклад 2.39. Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned}
&\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{array} \right| = \\
&= 6 \int \frac{t^5 dt}{t^2 + t^3} = 6 \int \frac{t^3 dt}{1+t} = 6 \int \frac{(t^3 + 1) - 1 dt}{1+t} = \\
&= 6 \int (t^2 - t + 1) dt - 6 \int \frac{dt}{t+1} = \left| \begin{array}{l} t+1 = y \\ dt = dy \end{array} \right| = \\
&= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \int \frac{dy}{y} = 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6 \ln |t+1| + C = \\
&= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6 \ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C. \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Приклад 2.40. Метод інтегрування за частинами.

Нехай функції $u(x)$ і $v(x)$ визначені й диференційовані на деякому проміжку X . Тоді справедлива *формула інтегрування за частинами*:

$$\int u dv = u v - \int v du. \quad (2.18)$$

Обчислимо інтеграл $\int x e^x dx$:

$$\int x e^x dx = \left. \begin{array}{l} \underline{u = x} \\ dv = e^x dx \Rightarrow \\ \int dv = \int e^x dx \Rightarrow \underline{v = e^x} \\ du = dx \end{array} \right| =$$
$$= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1) e^x + C. \blacktriangleright$$

Приклад 2.41. Обчислити інтеграл $\int x^2 \sin x dx$.

Розв'язання:

$$\int x^2 \sin x dx = \left. \begin{array}{l} \underline{u = x^2} \\ dv = \sin x dx \Rightarrow \\ \int dv = \int \sin x dx \Rightarrow \underline{v = -\cos x} \\ du = 2x dx \end{array} \right| =$$
$$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x dx =$$
$$= \left. \begin{array}{l} \underline{u = x} \\ dv = \cos x dx \Rightarrow \underline{v = \sin x} \\ du = dx \end{array} \right| =$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x - 2 \int \sin x dx =$$
$$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C = (2 - x^2) \cos x + 2x \sin x + C. \blacktriangleright$$

2.8. Визначений інтеграл (формула Ньютона – Лейбніца). Невласний інтеграл першого роду. Ряд Фур'є

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a; b]$, то вона інтегрована на ньому, тобто існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x) dx$, де числа a і b називаються нижньою і верхньою межами інтегрування функції $f(x)$, відповідно.

Розглянемо плоску фігуру (криволінійну трапецію), обмежену графіком неперервної функції $y=f(x)$, прямими $x=a$, $x=b$ і відрізком $[a, b]$ осі абсцис Ox (рис. 2.10). Виявляється, що площу цієї трапеції можна обчислити за допомогою визначеного інтеграла $S = \int_a^b f(x) dx$, де a і b – нижня і верхня межі інтеграла (геометричний зміст визначеного інтеграла).

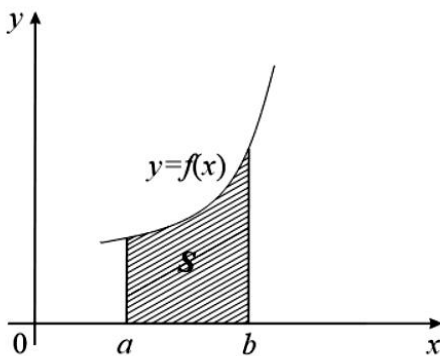


Рис. 2.10. Площа криволінійної трапеції $S = \int_a^b f(x) dx$

Зауваження 1. Типову ізометричну механокінетичну криву процесу спонтанного скорочення-розслаблення гладенького м'язу антрального відділу шлунка (*antrum*) зображено на рис. 2.11.

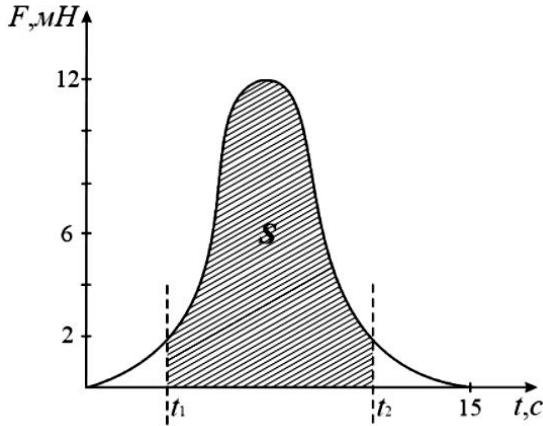


Рис. 2.11. Ізометрична механокінетична крива спонтанного скорочення-розслаблення гладенького м'яза антрального відділу шлунка (*antrum*)

Знаючи вигляд залежності $F(t)$ (сила скорочення-розслаблення м'яза як функція часу), можна розрахувати (або визначити за даними експерименту) величину площі, яку описує ця механокінетична

крива за певний проміжок часу $[t_1; t_2]$: $S = \int_{t_1}^{t_2} F(t) dt$. По суті, цей

біомеханічний параметр є показником працездатності м'яза: чим більша площа, тим більшу силу розвиває м'яз із часом.

Наведемо деякі основні властивості визначеного інтеграла:

$$1) \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx; \tag{2.19}$$

$$2) \int_a^b Cf(x) dx = C \int_a^d f(x) dx + C \int_d^b f(x) dx \quad (C = \text{const}, d \in [a; b]).$$

Щоб обчислити визначений інтеграл, скористаємось основною формулою інтегрального числення (*формула Ньютона – Лейбніца*):

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{2.20}$$

де $F(x)$ – первісна функція $f(x)$.

Приклад 2.42. Обчислити інтеграл $\int_0^2 3x^2 dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^2 3x^2 dx = 3 \int_0^2 x^2 dx = x^3 \Big|_0^2 = 8. \blacktriangleright$$

Приклад 2.43. Обчислити інтеграл $\int_1^e x \ln x dx$.

Розв'язання:

$$\int_1^e x \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x dx \Rightarrow \int dv = \int x dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2} \\ du = \frac{dx}{x} \end{array} \right| =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \frac{1}{x} dx =$$
$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e = \frac{1}{4} (e^2 + 1). \blacktriangleright$$

Приклад 2.44. Обчислити інтеграл $\int_0^2 6 \cos(2x-1) dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^2 6 \cos(2x-1) dx = \left| \begin{array}{l} 2x-1 = y \\ 2dx = dy \Rightarrow dx = \frac{dy}{2} \end{array} \right| =$$
$$= 3 \int_{-1}^3 \cos y dy = 3 \sin y \Big|_{-1}^3 = 3(\sin 3 + \sin 1).$$

Зробивши заміну в підінтегральному виразі, ми одразу змінили межі інтегрування: коли $x=0 \Rightarrow y=-1$ і коли $x=2 \Rightarrow y=3$. \blacktriangleright

Приклад 2.45. Обчислити інтеграл $\int_0^1 \frac{x^4}{x^2+5} dx$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{x^4}{x^2+5} dx &= \int_0^1 \frac{x^4-25}{x^2+5} dx + 25 \int_0^1 \frac{1}{x^2+5} dx = \int_0^1 (x^2-5) dx + \\ &+ 25 \int_0^1 \frac{1}{x^2+5} dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 - 5x \Big|_0^1 + \left| \begin{matrix} x = \sqrt{5}y \\ dx = \sqrt{5}dy \end{matrix} \right| = -\frac{14}{3} + \\ &+ 5\sqrt{5} \int_0^{1/\sqrt{5}} \frac{1}{y^2+1} dy = -\frac{14}{3} + 5\sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Зробивши заміну в підінтегральному виразі, ми одразу змінили межі інтегрування: коли $x=0 \Rightarrow y=0$ і коли $x=1 \Rightarrow y = 1/\sqrt{5}$. ►

Приклад 2.46. Обчислити площу фігури, яка обмежена графіками функцій $y=f_1(x)=2-x$ та $y=f_2(x)=x^2$.

Розв'язання. Якщо фігура обмежена графіками неперервних функцій $y=f_1(x)$ та $y=f_2(x)$, $a \leq x \leq b$, то її площа може бути розрахована за формулою

$$S = \left| \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx \right|. \quad (2.21)$$

Знайдемо спочатку абсциси точок перетину цих функцій, які й будуть межами інтегрування:

$$y=f_1(x)=f_2(x) \Rightarrow 2-x=x^2 \Rightarrow x_1=a=-2 \text{ та } x_2=b=1.$$

За формулою (2.21) маємо:

$$\begin{aligned} S &= \left| \int_{-2}^1 [2-x-x^2] dx \right| = \left| \int_{-2}^1 2 dx - \int_{-2}^1 x dx - \int_{-2}^1 x^2 dx \right| = \\ &= \left| 2x \Big|_{-2}^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_{-2}^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_{-2}^1 \right| = \frac{9}{2}. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.47. Визначити роботу, необхідну для запуску супутника масою m із поверхні Землі вертикально вгору на висоту h .

Розв'язання. Робота змінної сили $F(x)$ із переміщення тіла з початкової точки a в кінцеву точку b ($a \leq x \leq b$) визначається за

$$A = \int_a^b F(x) dx. \quad (2.22)$$

Згідно із законом Ньютона, сила притягання супутника Землею визначається за формулою $F = G \frac{mM}{x^2}$, де G – гравітаційна стала, M – маса Землі, x – відстань від супутника до центра Землі: $R \leq x \leq h + R$, де R – радіус Землі. За формулою (2.22) маємо:

$$\begin{aligned} A &= GmM \int_R^{R+h} \frac{dx}{x^2} = -GmM \frac{1}{x} \Big|_R^{R+h} = GmM \frac{h}{R(R+h)} = \\ &= \frac{GM}{R^2} \frac{mRh}{R+h} = mg \frac{Rh}{R+h}. \end{aligned}$$

Тут ми врахували той факт, що за $x=R$ сила притягання супутника Землею дорівнює його вазі, тобто $G \frac{mM}{R^2} = mg \Rightarrow \frac{GM}{R^2} = g$ (прискорення вільного падіння біля поверхні Землі). ►

Нехай функція $f(x)$ визначена, наприклад, на проміжку $[a; +\infty)$ та інтегрована на будь-якому відрізку $[a; R]$. Тоді скінченну границю

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_a^R f(x) dx = \int_a^{+\infty} f(x) dx \quad (2.23)$$

називають *невласним інтегралом першого роду*.

Приклад 2.48. Обчислити інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{2dx}{1+x^2}$.

Розв'язання:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{2dx}{1+x^2} &= 2 \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R \frac{dx}{1+x^2} = 2 \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^R = \\ &= 2 \lim_{R \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} R = 2 \frac{\pi}{2} = \pi. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 2.49. Розрахувати роботу, необхідну для виведення супутника в міжпланетний простір.

Розв'язання. Це означає, що $h \rightarrow +\infty$ (див. приклад 2.47). Отже,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +\infty} A &= \lim_{h \rightarrow +\infty} \int_R^{R+h} F(x) dx = mg \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{Rh}{R+h} = \\ &= mg \lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{R}{1 + \frac{R}{h}} = mgR. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Нехай функція $f(x)$ визначена та інтегрована на відрізку $[-l; l]$. Тоді числа

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad (2.24)$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx \quad \text{при } n \neq 0 \quad (n - \text{цілі числа}), \quad (2.25)$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) dx \quad (2.26)$$

називають *коефіцієнтами Фур'є*, а ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \left(\frac{n\pi}{l} x \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi}{l} x \right) \right] \quad (2.27)$$

– *рядом Фур'є* функції $f(x)$.

Кажуть, що функція $f(x)$ є суперпозицією гармонічних коливань із частотою $k_n = \frac{n\pi}{l}$ в одновимірному просторі x , де n – номер гармонічного коливання, a_n та b_n – його амплітуди.

Зауваження 2. Якщо функція $f(x)$ парна, то при її інтегуванні за симетричними межами справедлива формула

$$\int_{-l}^l f(x) dx = 2 \int_0^l f(x) dx. \quad (2.28)$$

Якщо функція $f(x)$ непарна, то інтеграл від неї за симетричними межами тотожно дорівнює нулю.

Якщо функція $f(x)$ парна, то коефіцієнти $b_n \equiv 0$, а якщо непарна, то коефіцієнти $a_n \equiv 0$. ►

Приклад 2.50. Розкласти в ряд Фур'є на $[-\pi; \pi]$ функцію $f(x) = |x|$.

Розв'язання. Оскільки функція $f(x) = |x|$ є парною ($f(-x) = f(x)$), то

$$b_n \equiv 0 \quad \text{і} \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \, dx = \frac{2}{\pi} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{\pi} = \pi;$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx =$$

$$= \left. \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos nx \, dx \Rightarrow \int dv = \int \cos nx \, dx \Rightarrow v = \left. \begin{array}{l} nx = y \\ ndx = dy \Rightarrow dx = \frac{dy}{n} \end{array} \right| = \\ = \frac{1}{n} \int \cos y \, dy = \frac{\sin y}{n} = \frac{\sin nx}{n} \\ du = dx \end{array} \right| = \\ = \left. \frac{2x \sin nx}{\pi n} \right|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{2 \cos nx}{\pi n^2} \left. \right|_0^{\pi} = \frac{2}{\pi n^2} [(-1)^n - 1] = \\ = \begin{cases} 0, & n \text{ парне,} \\ -\frac{4}{\pi n^2}, & n \text{ непарне.} \end{cases}$$

Отже, шуканий ряд Фур'є функції $f(x)$ має вигляд

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left[\cos x + \frac{1}{9} \cos 3x + \dots \right]. \quad \blacktriangleright$$

Завдання для самостійної роботи

У задачах 1–5 знайдіть область визначення функцій, які задані формулами:

$$1. y = \sqrt{3x-1} + \frac{1}{\sqrt{5-x}}.$$

$$2. y = \sqrt{2-3x} + \lg x.$$

$$3. y = 3^{1/x}.$$

$$4. y = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4.$$

$$5. y = \arccos(x+2).$$

У задачах 6–15 знайдіть границі:

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sqrt{1+x}-1}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right)^{2x^2}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{2x-1}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2+3}{-x^2+2}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2-x)^4 - (2+x)^4}{(3-x)^4 - (3+x)^4}.$$

У задачах 16–18 знайдіть, яка з функцій є парною, непарною і яка не є ні парною, ні непарною:

$$16. y = \left(\frac{1}{3} \right)^x - 3^x.$$

$$17. y = \frac{x}{\sin x}.$$

$$18. y = \log_2 \frac{2-x}{2+x}.$$

У задачах 19–30 знайдіть похідні функцій:

$$19. y = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} + 4.$$

$$20. y = \sqrt[8]{x^3} - 4x^6 + 5 \ln x - 7 \cos x + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x.$$

$$21. y = 4e^x + \operatorname{arctg} x + \arcsin x.$$

$$22. y = 5^x + 6^x + \left(\frac{1}{7}\right)^x.$$

$$23. y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}.$$

$$24. y = \ln(x+1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3}).$$

$$25. y = e^{\operatorname{tg} 3x}.$$

$$26. y = \frac{1}{2} \arcsin\left(\frac{x^2}{\sqrt{3}}\right).$$

$$27. y = \frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x}.$$

$$28. y = \arcsin(e^{4x}).$$

$$29. y = \ln(\operatorname{arctg}(\sqrt{1+x^2})).$$

$$30. y = \ln(\arccos 2x).$$

31. Складіть рівняння дотичної до графіків функцій:

1) $f(x) = 4x - x^2 - 3$ – у точках перетину з віссю Ox ;

2) $f(x) = \ln x$ – у точці $A(e;1)$;

3) $f(x) = e^{2x}$ – у точці $A\left(\frac{1}{2}, e\right)$.

32. Коло задано рівнянням $x^2 + y^2 - 4x = 0$. Знайдіть рівняння дотичних до кола в точках його перетину з віссю Ox .

У задачах 33–37 знайдіть диференціали функцій:

$$33. y = e^{\frac{1}{\cos x}}.$$

$$34. y = \frac{x+1}{\sqrt{x+1}}.$$

$$35. y = \operatorname{arctg} x.$$

$$36. y = x \ln x.$$

$$37. y = \sin^3 2x.$$

У задачах 38–43 знайдіть похідну другого порядку від функцій:

38. $y = \ln(2x - 3)$.

39. $y = \cos^2 x$.

40. $y = \frac{x+1}{x-1}$.

41. $y = \arctg\left(\frac{x}{2}\right)$.

42. $y = e^x \cos x$.

43. $y = x^3 2^x$.

У задачах 44–50 знайдіть границі за правилом Лопітала:

44. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{e^{3/x} - 1}$.

45. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

46. $\lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \ctg x)$.

47. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \tg \frac{\pi}{2} x$.

48. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$.

49. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - \arctg x}{x^3} \right)$.

50. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \left(\frac{1 - 2 \sin x}{\cos 3x} \right)^2$.

51. Розкладіть функцію $f(x) = x^4 + 2x^3 - 8x^2 + 4x + 4$ за степенями $(x - 1)$ за формулою Тейлора з точністю до квадратичного члена.

52. Розкладіть функції за формулою Маклорена:

1) $f(x) = e^{-x}$ – до члена з x^2 включно;

2) $f(x) = e^{2x-x^2}$ – до члена з x^5 ;

3) $f(x) = \ln(\cos x)$ – до члена з x^4 .

53. Розкладіть функції за формулою Маклорена до члена з x^3 включно:

1) $f(x) = \sin(\sin x)$;

2) $f(x) = \tg 3x$;

3) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}}$;

4) $f(x) = \sin^2 x$;

5) $f(x) = \ln(1 - x^2)$;

6) $f(x) = \frac{1}{3+2x}$;

7) $f(x) = \sqrt[5]{1+x}$;

8) $f(x) = \frac{3}{4-x}$.

У задачах 54–58, використавши розклад Маклорена для відповідних функцій, знайдіть границі:

$$54. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2}.$$

$$55. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x + 2 \sin x - 3x}{x^4}.$$

$$56. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$57. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(\cos x + x^2 / 2)}{x(\sin x - x)} \right).$$

$$58. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + x^2} \cos x}{x^4}.$$

59. Знайдіть максимуми й мінімуми функцій:

$$1) f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - x + 3};$$

$$2) f(x) = x \ln x;$$

$$3) f(x) = \frac{x}{x^2 + 1};$$

$$4) f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2;$$

$$5) f(x) = x^2 e^{-x}.$$

60. Знайдіть точки перегину графіка функцій:

$$1) f(x) = x^3 - 6x^2 + x;$$

$$2) f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2;$$

$$3) f(x) = (x-1)^4;$$

$$4) f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1};$$

$$5) f(x) = 2x^2 + \ln x;$$

$$6) f(x) = x \operatorname{arctg} x.$$

61. Знайдіть асимптоти графіків функцій:

1) $f(x) = \frac{5x}{x-1}$;

2) $f(x) = \frac{x}{2x-1} + x$;

3) $f(x) = \frac{x^2 + 5}{x^2 - 1} + 2x$;

4) $f(x) = xe^{1/x}$;

5) $f(x) = x - 2\arctg x$.

У задачах 62–69 побудуйте графіки функцій:

62. $y = 12x - x^3$.

63. $y = x\sqrt{1-x}$.

64. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$.

65. $y = xe^{-x/2}$.

66. $y = \frac{2}{e^x(x+3)}$.

67. $y = 2x + \frac{1}{x^2}$.

68. $y = x + \arctg x$.

69. $y = x - \ln x$.

70. Одне з найпростіших емпіричних рівнянь, яке описує силу ізометричного скорочення-розслаблення гладенького м'яза із часом, має вигляд $F(t) = A \cdot t^n \cdot e^{-kt}$, де A , n і k – деякі сталі параметри. Побудуйте графік функції $F(t)$, якщо $n=1$ і $k=1$.

71. Розмір деякої популяції в момент часу t задається формулою $N(t) = 100 + 12t - t^2$. Знайдіть швидкість зростання кількості особин цієї популяції при: а) $t=0$ год; б) $t=5$ год. Визначте момент часу, коли популяція досягне свого найбільшого розміру.

72. Популяція бактерій зростає за законом $N(t) = \frac{100e^{2t}}{1+0,3(e^{2t}-1)}$.

Побудуйте графік цієї функції.

73. Хворому вводять ін'єкцію ліків у момент часу $t=0$. Концентрація цих ліків у крові як функція часу описується залежністю $c(t) = 3(e^{-2t} - e^{-4t})$. Побудуйте її графік.

У задачах 74–83 знайдіть частинні похідні першого і другого порядків від функцій:

$$74. z = x^3 + 3x^2y - y^3.$$

$$75. z = \arctg\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$76. z = \frac{x+y}{x-y}.$$

$$77. z = xye^{x+2y}.$$

$$78. z = e^{-y/x}.$$

$$79. z = \ln(x + \ln y).$$

$$80. z = x + y + \frac{xy}{x-y}.$$

$$81. z = \ln(x + e^{xy}).$$

$$82. z = \ln(x - 2y).$$

$$83. z = x^2 \sin\sqrt{y}.$$

$$84. \text{Для функції } z = e^x \cos y \text{ доведіть, що } \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

У задачах 85–88 знайдіть екстремуми функцій:

$$85. z = y^2 - x^2 - xy - 2x - 6y.$$

$$86. z = y\sqrt{x} - y^2 - x + 6y.$$

$$87. z = e^{x/2}(x + y^2).$$

$$88. z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2.$$

89. Реакція організму на ін'єкцію x одиниць лікарського препарату описується функцією $R(x, y) = x^2(a - x)y^2 e^{-2y}$, де y характеризує час із моменту ін'єкції, a – деяка дійсна стала. Знайдіть частинні похідні $\frac{\partial R}{\partial x}$ і $\frac{\partial R}{\partial y}$.

90. Під час лікування деякого захворювання одночасно призначають два фармпрепарати. Реакція організму R на x одиниць першого препарату та y одиниць другого препарату описується функцією $R(x, y) = x^2(a-x)y^2(b-y)$, де a і b – деякі дійсні сталі. Яка кількість у другого препарату викликає максимальну реакцію за фіксованої кількості x першого препарату?

91. Об'єм фіксованої кількості газу V прямо пропорційно залежить від температури T і обернено пропорційно – від тиску P (закон Клайперона – Менделєєва): $V(T, P) = k \frac{T}{P}$, де k – деяка дійсна стала.

Доведіть рівність $k \frac{\partial V}{\partial P} + V \frac{\partial V}{\partial T} = 0$.

92. Нехай у результаті експерименту отримано п'ять значень шуканої функції y за п'яти значень її аргументу x :

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Знайдіть залежність між x та y у вигляді лінійної функції $y = kx + b$.

93. В електричному колі упродовж 10 с вимірюють напругу U з інтервалом 1 с. Результати наведено в таблиці:

U	12	11	10	9	9	8	8	7	7	6
t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

З теорії відомо, що функціональна залежність між U і t є лінійною, тобто $U = kt + b$. Зрозуміло, що якщо б вимірювання були точними, то вистачило б двох експериментальних точок для побудови лінійної функції. Однак практично результати будь-якого вимірювання є наближеними. Якщо побудувати експериментальні точки з координатами $(U; t)$ за даними вищенаведеної таблиці, то виявиться, що всі вони не лежать на одній прямій. Отже, треба знайти такі параметри k

і b , за яких лінійна функція $U = kt + b$ достатньо точно відобразить результати експерименту, наведені в таблиці.

94. У таблиці наведені результати вимірювання сили звуку літака I (дБ) залежно від відстані до точки зльоту s (км):

I , дБ	115	108	102	98	93	89	87	72	65	60
s , км	1	2,5	3	5,5	7	8,5	10	15	20	30

Використовуючи метод найменших квадратів, підберіть лінійну функцію $I = ks + b$. Знайдіть:

1) на якій відстані від точки зльоту літака звук стає смертельно небезпечним для людини (понад 120 дБ);

2) на якій відстані від аеропорту можна будувати житлові будинки (менше 75 дБ), дитячі заклади й лікарні (60 дБ).

У задачах 95–130 знайдіть інтеграли:

$$95. \int \left(4x^2 + \frac{5}{x} + 7x - 10 \right) dx.$$

$$96. \int \frac{(\sqrt{x} - 1)^3}{x} dx.$$

$$97. \int 10 \sin(3x + 5) dx.$$

$$98. \int \frac{x^4}{x^5 + 7} dx.$$

$$99. \int \frac{\sin x}{1 + 3 \cos x} dx.$$

$$100. \int \frac{e^{\arctg x}}{1 + x^2} dx.$$

$$101. \int \frac{3^{1/x}}{x^2} dx.$$

$$102. \int 4^{1-3x} dx.$$

$$103. \int \frac{1}{\sqrt{3 + 2x^2}} dx.$$

$$104. \int \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 5}} dx.$$

$$105. \int \frac{x}{\sqrt{2 - x^4}} dx.$$

$$106. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx.$$

$$107. \int \frac{1}{3x^2 - 2x - 1} dx.$$

$$108. \int \frac{3x + 1}{x^2 - 2x + 5} dx.$$

$$109. \int \frac{\ln(\cos x)}{\sin^2 x} dx.$$

$$110. \int (x^2 + 3x + 2) \ln x dx.$$

111. $\int \frac{3e^{2x} - 4e^4}{e^{2x} + 4} dx.$

113. $\int \ln^2 x dx.$

115. $\int e^x \sin x dx.$

117. $\int \frac{3x+5}{\sqrt{4x+1}} dx.$

119. $\int \frac{x^4}{\sqrt{4-x^{10}}} dx.$

121. $\int \frac{1}{\sqrt{2+3x-2x^2}} dx.$

123. $\int \frac{x^3}{x-2} dx.$

125. $\int x \operatorname{arctg}(1-x) dx.$

127. $\int \sin 3x \sin 5x dx.$

129. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

112. $\int x^2 \cos x dx.$

114. $\int \cos(\ln x) dx.$

116. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx.$

118. $\int \frac{e^x}{\sqrt{5-e^{2x}}} dx.$

120. $\int \frac{x^6}{x^{14}+5} dx.$

122. $\int \frac{1+x}{x^2+x-1} dx.$

124. $\int \frac{2x^2-1}{x^2-x+1} dx.$

126. $\int \cos^2 x \sin^2 x dx.$

128. $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^5 x} dx.$

130. $\int \frac{3e^{2x} - 4e^4}{e^{2x} + 4} dx.$

У задачах 131–140 обчисліть визначені інтеграли:

131. $\int_1^2 \left(-2x^2 + \frac{3}{x} - 7x + 20 \right) dx.$

133. $\int_1^2 4e^{-x+1} dx.$

135. $\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2+2x+2} dx.$

137. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx.$

132. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin(2x+\pi) dx.$

134. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} x \sin x dx.$

136. $\int_{-1}^1 x^2 e^{-x} dx.$

138. $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} dx.$

$$139. \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx.$$

$$140. \int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx.$$

У задачах 141–143 знайдіть площу фігур, обмежених лініями:

$$141. y^2 = 2px, x = h.$$

$$142. y = |x| + 1, y = 0, x = -2, x = 1.$$

$$143. y = x^2, y = \sqrt{x}.$$

У задачах 144–151 обчисліть невласні інтеграли:

$$144. \int_0^{+\infty} e^{-x} dx.$$

$$145. \int_0^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx.$$

$$146. \int_{-\infty}^0 x e^x dx.$$

$$147. \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x dx.$$

$$148. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$$

$$149. \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx.$$

$$150. \int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx.$$

$$151. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5} dx.$$

У задачах 152–154 розкладіть функції в ряд Фур'є на відрізку $[-\pi; \pi]$:

$$152. f(x) = \sin x.$$

$$153. f(x) = 2x + 3.$$

$$154. f(x) = x^3.$$

У задачах 155–156 розкладіть функції в ряд Фур'є на відрізку $[-l; l]$:

$$155. f(x) = x.$$

$$156. f(x) = \begin{cases} -1, & -l \leq x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq l. \end{cases}$$

Лабораторна робота

Учені вивчали залежність між масами тіл мавп-матерів та їхніх новонароджених дитинчат і проводили лабораторний нагляд за 20 мавпами. Отримано такі результати:

№	Маса тіла мавпи-матері u_i , кг	Маса тіла новонародженого дитинчати x_i , кг
1	10	0,7
2	10,8	0,73
3	11,3	0,75
4	10	0,7
5	10,1	0,65
6	11,1	0,65
7	11,3	0,7
8	10,2	0,61
9	13,5	0,7
10	12,3	0,63
11	14,5	0,7
12	11	0,65
13	12	0,72
14	11,8	0,69
15	13,4	0,78
16	11,4	0,7
17	12	0,6
18	15,6	0,85
19	13	0,8
20	12,1	0,75

Використовуючи метод найменших квадратів, побудуйте залежність між y та x у вигляді лінійної функції (лінія регресії) $y = kx + b$.

РОЗДІЛ 3

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

3.1. Лінійні та нелінійні диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші

Вивчаючи біологічні явища чи процеси в межах математичних моделей, не завжди можна знайти безпосередньо залежність між величинами, що їх описують, однак можна встановити зв'язок між певними величинами (назвемо їх функціями) і швидкостями їхніх змін (похідні цих функцій) відносно інших величин (вважатимемо їх незалежними змінними). Отже, можна побудувати рівняння, у яке невідомі функції входять під знаком похідної. Такі рівняння називають *диференціальними*. Вони є одним із головних інструментів сучасної теорії моделювання, включаючи процеси розвитку живих систем.

Диференціальним називають рівняння, яке, крім функції y та змінної x , містить вищі похідні функції $y', \dots, y^{(n)}$.

Найвищий порядок похідної, яка входить у диференціальне рівняння, називають *порядком диференціального рівняння*.

Диференціальне рівняння називають *лінійним*, якщо невідома функція y та її похідна y' входять у рівняння лише в першому степені.

У випадку функції однієї змінної $y(x)$ рівняння називають *звичайним диференціальним рівнянням*.

У випадку функції двох ($y = f(x, z)$) і більше змінних рівняння називають *диференціальним рівнянням у частинних похідних*.

Зауваження 1. Розглянемо, наприклад, доволі загальну модель для опису багатьох процесів у біологічній кінетиці. Для простоти будемо вважати простір одновимірним, тобто об'єм, у

якому відбуваються біохімічні реакції, – це вузька й довга трубка, уздовж якої перебігає процес перенесення речовини. Нехай $x(t, r)$ – концентрація речовини, яка залежить від часу t і просторової координати r . Тоді в одновимірному випадку система "біохімічна реакція – дифузія речовини" описується диференціальним рівнянням другого порядку в частинних похідних (*одновимірним рівнянням дифузії*)

$$\frac{\partial x(t, r)}{\partial t} = f(x(t, r)) + D \frac{\partial^2 x(t, r)}{\partial r^2}.$$

Тут функція $f(x(t, r))$ описує зміну концентрації речовини $x(t, r)$ у кожній точці простору внаслідок її біохімічних перетворень; $D \frac{\partial^2 x(t, r)}{\partial r^2}$ – величина, яка описує процес перенесення речовини між сусідніми точками простору; $D > 0$ – коефіцієнт дифузії речовини.

Розподіл густини популяції $n(t, r)$ з урахуванням міграції та зміни швидкості зростання її чисельності в одновимірному випадку (уздовж координати r) описується рівнянням

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \gamma n(K - n) + D \frac{\partial^2 n}{\partial r^2}.$$

Тут $\gamma > 0$, $K > 0$ та $D > 0$ – параметри моделі, що визначають відносну швидкість зростання чисельності популяції, максимальну густину популяції і коефіцієнт дифузії (міграції) популяції, відповідно.

Процедуру знаходження розв'язків диференціального рівняння називають інтегруванням цього рівняння.

Диференціальне рівняння першого порядку має загальний вигляд

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad (3.1)$$

де x – незалежна змінна, $y(x)$ – шукана функція, а $y'(x)$ – її похідна.

Приклад 3.1. Розглянемо нелінійне диференціальне рівняння

$$y' = \frac{dy}{dx} = x^2 + 1 = f(x).$$

Легко перевірити, що функція $y(x) = \frac{x^3}{3} + x + C$, де C – довільна стала, є загальним розв'язком цього диференціального рівняння. Залежно від значення C ми отримуємо цілий набір розв'язків. Задаючи, наприклад, початкову умову

$$y \Big|_{x=x_0} = y(x_0) = y_0, \quad (3.2)$$

можна отримати частинний розв'язок диференціального рівняння. Для цього знайдемо сталу C :

$$y_0 = \frac{x_0^3}{3} + x_0 + C \Rightarrow C = y_0 - \frac{x_0^3}{3} - x_0.$$

У результаті маємо:

$$y = \frac{x^3}{3} + x + y_0 - \frac{x_0^3}{3} - x_0. \blacktriangleright$$

Знайти єдиний розв'язок рівняння (3.1), яке задовольняє початкову умову (3.2), – одна з важливих задач теорії диференціальних рівнянь. Ця задача називається *задачею Коші*.

Якщо у рівнянні (3.1) функцію $f(x, y)$ можна зобразити у вигляді $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$, то рівняння

$$y' = \frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y) \Rightarrow \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx \quad (3.3)$$

називають *диференціальним рівнянням із відокремлюваними змінними*.

Приклад 3.2. Розв'язати рівняння $y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{e^y}$ за початкової умови $y(0) = 0$.

Розв'язання. Маємо:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{x}{e^y} \Rightarrow e^y dy = x dx.$$

Проінтегруємо ліву і праву частини цього рівняння та одержимо загальний розв'язок вихідного диференціального рівняння:

$$\int e^y dy = \int x dx = \frac{x^2}{2} + C,$$

$$e^y = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow y = \ln \left(\frac{x^2}{2} + C \right).$$

З початкової умови визначимо сталу C : $0 = \ln C \Rightarrow C = 1$.
Отже, маємо частинний розв'язок вихідного диференціального рівняння: $y(x) = \ln \left(\frac{x^2}{2} + 1 \right)$. ►

Приклад 3.3. Розглянемо задачу про закон природного зростання. За цим законом швидкість збільшення кількості речовини m прямо пропорційна її величині. Оскільки швидкість збільшення кількості речовини є швидкістю зміни величини m із часом t , тобто дорівнює її похідній $m' = \frac{dm}{dt}$, то закон природного зростання можна записати як

$$m' = \frac{dm}{dt} = km,$$

де $k > 0$ – коефіцієнт пропорційності.

Розв'яжемо це лінійне диференціальне рівняння:

$$\begin{aligned} \frac{dm}{dt} = km &\Rightarrow \frac{dm}{m} = k dt \Rightarrow \\ \int \frac{dm}{m} = k \int dt &\Rightarrow \ln m = kt + \tilde{C} \Rightarrow \\ \Rightarrow m = e^{kt + \tilde{C}} &= e^{\tilde{C}} \cdot e^{kt} = C e^{kt}. \end{aligned}$$

Припустимо, що в початковий момент часу, прийнятий за нуль, кількість речовини становила $m_0 = m(0)$ (задача Коші). Отже, одержуємо шуканий розв'язок у вигляді експоненціальної функції: $m(t) = m_0 e^{kt}$, оскільки $C = m_0$ (рис. 3.1). ►

Значимо, що за таким універсальним законом, наприклад, відбувається розмноження бактерій, а також збільшення чисельності популяції із часом без урахування конкуренції (закон Мальтуса).

Зауваження 2. У випадку, коли $k < 0$, отримуємо: 1) закон радіоактивного розпаду (швидкість розпаду радіоактивної речовини прямо пропорційна її кількості); 2) закон зменшення інтенсивності світла в середовищі залежно від його товщини (закон

Бугера – Ламберта – Бера); 3) зменшення концентрації лікарського препарату в організмі внаслідок його виведення природним шляхом (рис. 3.1).

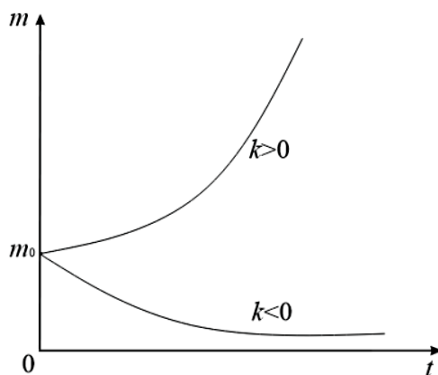


Рис. 3.1. Графічний аналіз закону природного зростання

Приклад 3.4. Розглянемо задачу про динаміку чисельності популяції (модель Ферхюльста). Основу цієї популяційної моделі становлять такі припущення:

- кількість особин, які народжуються в популяції, прямо пропорційна її кількості (вважаємо, що народжуваність перевищує природну смертність);
- зменшення кількості особин популяції відбувається за рахунок внутрішньовидової конкуренції (конкуренцію між особинами виду можна визначити як використання деякого ресурсу – їжі, води, світла, простору тощо – будь-яким організмом, який тим самим зменшує доступ цього ресурсу для інших організмів виду).

Популяційна модель внутрішньовидової конкуренції описується логістичним рівнянням

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2.$$

Тут перший (лінійний) доданок описує зростання чисельності популяції N зі швидкістю $a > 0$, а другий (квадратичний – най-

менша кількість конкуруючих особин дорівнює двом), навпаки, – її зменшення зі швидкістю $b > 0$.

Розв'яжемо це нелінійне диференціальне рівняння за початковою умови $N(0) = N_0$ та побудуємо графік шуканої функції $N(t)$ за таких параметрів моделі: $a = 1$, $b = 0,5$ і $N(0) = 10$.

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= aN - bN^2 \Rightarrow \frac{dN}{aN - bN^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dN}{aN - bN^2} = \int \frac{dN}{-N^2 \left(b - \frac{a}{N} \right)} = \\ &= \left| \begin{array}{l} x = \frac{1}{N} \\ dx = -\frac{dN}{N^2} \end{array} \right| = \int \frac{dx}{b - ax} = \left| \begin{array}{l} y = b - ax \\ dy = -adx \Rightarrow dx = -\frac{1}{a} dy \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{a} \int \frac{dy}{y} = -\frac{1}{a} \ln y = -\frac{1}{a} \ln(b - ax) = \\ &= -\frac{1}{a} \ln \left(b - \frac{a}{N} \right) = t + \tilde{C} \Rightarrow b - \frac{a}{N} = e^{-at - a\tilde{C}} = Ce^{-at} \Rightarrow \\ \Rightarrow N(t) &= \frac{a}{b + Ce^{-at}} \Rightarrow N(0) = \frac{a}{b + C} = N_0 \Rightarrow C = \frac{a - bN_0}{N_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow N(t) = \frac{aN_0}{bN_0 + (a - bN_0)e^{-at}}. \end{aligned}$$

Побудуємо графік цієї функції за обраних параметрів моделі:

$$N(t) = \frac{10}{5 - 4e^{-t}}.$$

Ураховуючи, що

$$t \geq 0, N(t \rightarrow +\infty) \rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{10}{5 - 4e^{-t}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{10}{5 - \frac{4}{e^t}} = 2 = K$$

(горизонтальна асимптота)

$$\text{і } N'(t) = \left(\frac{10}{5 - 4e^{-t}} \right)' = -\frac{40e^{-t}}{(5 - 4e^{-t})^2} \neq 0 \text{ (точки екстремуму відсут-}$$

ні), будуємо графік шуканої функції (рис. 3.2).

Як бачимо, чисельність популяції із часом спадає, наближаючись до деякого значення K (гранична густина насичення популяції). ►

Рівняння вигляду

$$y' + p(x)y = f(x), \quad (3.4)$$

де $p(x)$ і $f(x)$ – неперервні функції, називається *лінійним диференціальним рівнянням першого порядку* (невідомі функції та її похідна входять у рівняння (3.4) у першому степені).

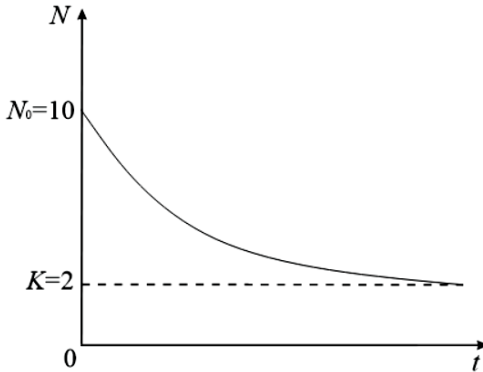


Рис. 3.2. Графік функції $N(t) = \frac{10}{5 - 4e^{-t}}$

Якщо $f(x) \equiv 0$, то рівняння (3.4) називається *лінійним однорідним рівнянням*. Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння (3.4) називається *лінійним неоднорідним рівнянням*.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (3.4) може бути використано *метод варіації змінної*.

Приклад 3.5. Знайти розв'язок рівняння $y' + \frac{y}{x} = \sin 2x$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку загальний розв'язок лінійно-го однорідного рівняння:

$$y' + \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln x + \tilde{C},$$

$$\ln y + \ln x = \tilde{C} \Rightarrow \ln yx = \tilde{C} \Rightarrow yx = e^{\tilde{C}} = C_1 \Rightarrow y(x) = \frac{C_1}{x}.$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y(x) = \frac{C_1(x)}{x}$, тобто вважаємо C_1 не сталою, а новою невідомою функцією від x . Тоді маємо:

$$\frac{C_1' x - C_1}{x^2} + \frac{C_1}{x^2} = \sin 2x \Rightarrow C_1' = x \sin 2x \Rightarrow C_1(x) = \int x \sin 2x dx =$$

$$= \left. \begin{array}{l} x = u \\ dv = \sin 2x dx \Rightarrow \int dv = \int \sin 2x dx \Rightarrow v = -\frac{1}{2} \cos 2x \\ dx = du \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = -\frac{x}{2} \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння буде таким:

$$y = \frac{C_1(x)}{x} = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sin 2x}{4x} + \frac{C}{x}.$$

Щоб отримати частинний розв'язок диференціального рівняння, ставимо задачу Коші: $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

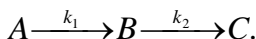
Тоді

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2C}{\pi} = 1 \Rightarrow C = \frac{\pi}{4}.$$

Отже, маємо:

$$y = -\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{\sin 2x}{4x} + \frac{\pi}{4x}. \blacktriangleright$$

Приклад 3.6. Розглянемо біохімічні реакції, які відбуваються послідовно:



Тут A , B і C – хімічні речовини; k_1 і k_2 – константи швидкості першої (перетворення речовини A на B) і другої (перетворення речовини B на C) реакцій, відповідно.

Експериментально встановлено, що швидкість зміни концентрації речовини B , яку позначимо через y , із часом змінюється за таким законом:

$$y' = \frac{dy}{dt} = k_1 A_0 e^{-k_1 t} - k_2 y.$$

Тут A_0 – початкова (вихідна) концентрація речовини A . Дослідимо динаміку концентрації речовини B за умов $k_1 = k_2 = k$ і початкової умови $y(0) = 0$.

Знайдемо спочатку загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння:

$$\begin{aligned} y' = \frac{dy}{dt} = -ky &\Rightarrow \frac{dy}{y} = -k dt \Rightarrow \\ \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -k \int dt &\Rightarrow \ln y = -kt + \tilde{C} \Rightarrow \\ \Rightarrow y(t) = e^{-kt + \tilde{C}} &= C_1 e^{-kt}. \end{aligned}$$

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\begin{aligned} y(t) = C_1(t) e^{-kt} : \\ C_1' e^{-kt} - C_1 k e^{-kt} = k A_0 e^{-kt} - C_1 k e^{-kt} &\Rightarrow C_1' = \frac{dC_1}{dt} = k A_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow C_1(t) = k A_0 t + C. \end{aligned}$$

З урахуванням умови $y(0) = 0$ загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння буде таким:

$$\begin{aligned} y(t) = C_1(t) e^{-kt} = (k A_0 t + C) e^{-kt} &\Rightarrow \\ y(0) = 0 \Rightarrow C = 0 &\Rightarrow y(t) = k A_0 t e^{-kt}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

3.2. Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Комплексні числа (формула Ейлера)

Рівняння вигляду

$$y'' = f(x, y, y') \quad (3.5)$$

називається *диференціальним рівнянням другого порядку*.

Задаючи початкові умови

$$\begin{cases} y|_{x=x_0} = y(x_0) = y_0 \\ y'|_{x=x_0} = y'(x_0) = \bar{y}_0, \end{cases} \quad (3.6)$$

можна знайти єдиний розв'язок рівняння (3.5) (*задача Коші*).

Зауваження 1. Рівняння вигляду $y'' = f(x)$ і $y'' = f(x, y')$ за допомогою заміни змінної $z(x) = y'$ можна звести до рівнянь першого порядку. Рівняння вигляду $y'' = f(y, y')$ можна звести до рівняння першого порядку за допомогою заміни змінної $z(y) = y'$. Таке перетворення рівняння (3.5) називається *пониженням порядку*.

Приклад 3.7. Розв'язати рівняння $y'' + 2y' = e^x$ за початкових умов $y(0) = 0$ та $y'(0) = \frac{1}{3}$.

Розв'язання. Виконаємо заміну $z(x) = y'$. Отримуємо лінійне рівняння першого порядку $z' + 2z = e^x$. Розв'яжемо його методом варіації змінної. Спочатку знайдемо розв'язок однорідного рівняння:

$$\begin{aligned} z' + 2z = 0 &\Rightarrow \frac{dz}{z} = -2dx \Rightarrow \ln z = -2x + \tilde{C} \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = e^{-2x + \tilde{C}} \Rightarrow z = Ce^{-2x}. \end{aligned}$$

Далі шукаємо розв'язок неоднорідного рівняння, вважаючи $C(x)$:

$$\begin{aligned} C'e^{-2x} - 2Ce^{-2x} + 2Ce^{-2x} &= e^x \Rightarrow C' = e^{3x} \Rightarrow \\ \Rightarrow C(x) &= \int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C_1. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned} z(x) = y' = C(x)e^{-2x} &= \frac{1}{3}e^x + C_1e^{-2x} \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= \frac{1}{3} \int e^x dx + C_1 \int e^{-2x} dx = \frac{1}{3}e^x - \frac{1}{2}C_1e^{-2x} + C_2. \end{aligned}$$

Невідомі коефіцієнти C_1 та C_2 визначимо з початкових умов:

$$\begin{cases} y(0) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}C_1 + C_2 = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{3} + C_1 = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Звідси $C_1 = 0$ і $C_2 = -\frac{1}{3}$. Шуканий розв'язок: $y = \frac{1}{3}(e^x - 1)$. ►

Рівняння вигляду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (3.7)$$

де $p(x)$, $q(x)$ та $f(x)$ – неперервні функції, називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку*.

Загальний розв'язок рівняння (3.7) є сумою будь-якого частинного розв'язку й загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (за $f(x) \equiv 0$).

Якщо функції $p(x) = p$ і $q(x) = q$ – сталі величини, то рівняння (3.7) називається *лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Розглянемо лінійне однорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами:

$$y'' + py' + qy = 0. \quad (3.8)$$

Рівняння

$$k^2 + pk + q = 0 \quad (3.9)$$

називається *характеристичним рівнянням* для рівняння (3.8).

Залежно від коренів k_1 і k_2 характеристичного рівняння (3.9) загальний розв'язок диференціального рівняння (3.8) може мати різний вигляд.

1. Якщо корені характеристичного рівняння (3.9) – різні дійсні числа ($k_1 \neq k_2$), то загальний розв'язок рівняння (3.8) має вигляд

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}. \quad (3.10)$$

2. Якщо корені характеристичного рівняння (3.9) – дійсні рівні між собою числа ($k_1 = k_2 = k$), то загальний розв'язок рівняння (3.8) має вигляд

$$y = e^{kx} (C_1 + C_2 x). \quad (3.11)$$

Приклад 3.8. Знайти розв'язок рівняння $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд

$$k^2 + 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k + 2)^2 = 0.$$

Його корені $k_1 = k_2 = -2$. Тоді, згідно з (3.11), загальним розв'язком рівняння буде $y = e^{-2x} (C_1 + C_2 x)$. ►

Зауваження 2. Комплексним числом z називається впорядкована пара дійсних чисел $(x; y)$ на площині Oxy , тобто $z = (x; y)$.

Комплексне число z можна зобразити в алгебраїчній формі:

$$z = x + iy, \quad (3.12)$$

де x називається *дійсною* ($x = \operatorname{Re} z$), а y – *уявною* ($y = \operatorname{Im} z$) *частинами* комплексного числа z ; i – *уявна одиниця*, причому $i = \sqrt{-1}$,

тобто $i^2 = -1$.

З рівності (3.12) випливає, що дійсні числа становлять частину комплексних чисел.

Комплексне число $\bar{z} = z^* = x - iy$ називається *комплексно спряженим* числу $z = x + iy$.

За допомогою комплексних чисел можна записати корені будь-якого квадратного рівняння. Наприклад, рівняння

$$x^2 - x + 1 = 0$$

має такі комплексно-спряжені розв'язки:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(-1) \cdot \frac{3}{4}} = \\ &= \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{-1} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{i^2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i. \end{aligned}$$

Справедлива *формула Ейлера*, що пов'язує комплексну експоненту з тригонометричними функціями:

$$e^{ikx} = \cos kx + i \sin kx.$$

Це рівняння, зокрема, описує розповсюдження плоскої хвилі у просторі (фізичний зміст має лише дійсна частина цього комплексного числа). Вісь x збігається з напрямком її розповсюдження, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ – хвильове число, де λ і v – довжина і швидкість плоскої хвилі, відповідно, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ – циклічна частота гармонічних коливань, де T – період коливань.

3. Якщо корені характеристичного рівняння (3.9) не дійсні, а комплексно спряжені ($k_1 = a + ib$ і $k_2 = a - ib$), то загальний розв'язок рівняння (3.8) має вигляд

$$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \quad (3.13)$$

Приклад 3.9. Знайти розв'язок рівняння

$$y'' + y' + y = 0.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + k + 1 = 0$, його корені $k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

Згідно з (3.13) загальним розв'язком рівняння буде

$$y = e^{-\frac{1}{2}x} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x + C_2 \sin \frac{\sqrt{3}}{2}x \right). \blacktriangleright$$

Приклад 3.10. Розв'язати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку $y'' + \omega_0^2 y = f_0 \cos \omega t$. Це рівняння описує вимушені коливання (напр. підвішеного на пружині вантажу) під дією зовнішньої періодичної сили $f(t) = f_0 \cos \omega t$ із частотою ω і амплітудою f_0 (опором середовища нехтуємо); $\omega_0 \neq \omega$ – частота вільних коливань у системі (напр. вантажу).

Розв'язання. Характеристичне рівняння $k^2 + \omega_0^2 = 0$ має комплексно спряжені корені $k_1 = i\omega_0$ та $k_2 = -i\omega_0$, загальний розв'язок вихідного рівняння визначається за формулою (3.13): $Y = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t$ (суперпозиція гармонічних коливань з амплітудами C_1 і C_2).

Частинний розв'язок шукаємо у вигляді $\tilde{y} = A \cos \omega t + B \sin \omega t$.
Після підстановки у вихідне рівняння маємо:

$$\begin{aligned} -A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t + \omega_0^2 (A \cos \omega t + B \sin \omega t) &= f_0 \cos \omega t \Rightarrow \\ \Rightarrow A(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + B(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \omega t &= f_0 \cos \omega t \Rightarrow \\ \Rightarrow A = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, B = 0 \Rightarrow \tilde{y} &= \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \end{aligned}$$

Загальним розв'язком вихідного рівняння буде

$$y = Y + \tilde{y} = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t.$$

Як бачимо, результуюче коливання в системі – це складний коливальний рух (суперпозиція двох коливань із різними частотами).►

Приклад 3.11. Знайти загальний розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z - 7y \\ \frac{dz}{dx} = -5z - 2y. \end{cases}$$

Розв'язання. Одним з основних методів знаходження розв'язку системи лінійних однорідних диференціальних рівнянь першого порядку зі сталими коефіцієнтами є *метод виключення невідомих*. За допомогою цього методу задана система зводиться до одного диференціального рівняння другого порядку відносно однієї невідомої функції.

Продиференціюємо перше з рівнянь системи по x :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{dz}{dx} - 7 \frac{dy}{dx}.$$

Підставляючи сюди вираз $\frac{dz}{dx}$ із другого рівняння системи й замінивши функцію z її виразом із першого рівняння, отримуємо лінійне однорідне рівняння другого порядку відносно однієї невідомої функції y :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 12 \frac{dy}{dx} + 37y = 0.$$

Характеристичне рівняння має вигляд $k^2 + 12k + 37 = 0$, його корені $k_{1,2} = -6 \pm i$.

Згідно з (3.13), загальним розв'язком рівняння буде

$$y(x) = e^{-6x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

Далі продиференціюємо функцію y за x і підставимо вирази для y та $\frac{dy}{dx}$ у перше рівняння системи. У результаті отримаємо шукану функцію z :

$$z = e^{-6x} \{(C_1 + C_2) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x\}. \blacktriangleright$$

Приклад 3.12. Знайти розв'язок системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 5y + 4z \\ \frac{dz}{dx} = 4y + 5z, \end{cases}$$

які задовольняють початкові умови $\begin{cases} y(0) = 2 \\ z(0) = 0. \end{cases}$

Розв'язання. Продиференціювавши перше з рівнянь системи по x , одержимо: $\frac{d^2 y}{dx^2} = 5 \frac{dy}{dx} + 4 \frac{dz}{dx}$. Підставимо сюди значення перших похідних із заданої системи:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 5(5y + 4z) + 4(4y + 5z) \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 41y + 40z.$$

З першого рівняння системи знайдемо значення z ,

$$z = \frac{1}{4} \left(\frac{dy}{dx} - 5y \right),$$

і підставимо його в диференціальне рівняння другого порядку для функції y :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 y}{dx^2} &= 41y + 10 \left(\frac{dy}{dx} - 5y \right) \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = 10 \frac{dy}{dx} - 9y \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} - 10 \frac{dy}{dx} + 9y = 0. \end{aligned}$$

Запишемо й розв'яжемо характеристичне рівняння для цього рівняння: $k^2 - 10k + 9 = 0$. Його корені $k_1 = 1$ і $k_2 = 9$. Тоді, згідно з (3.10), загальним розв'язком рівняння буде $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{9x}$.

Оскільки $z = \frac{1}{4} \left(\frac{dy}{dx} - 5y \right)$, а $y' = \frac{dy}{dx} = C_1 e^x + 9C_2 e^{9x}$, то маємо:

$$z(x) = -C_1 e^x + C_2 e^{9x}.$$

Ураховуючи далі початкові умови, знаходимо шуканий розв'язок системи:

$$\begin{cases} y(0) = 2 = C_1 + C_2 \\ z(0) = 0 = -C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = C_1 + C_2 \\ 0 = -C_1 + C_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y(x) = e^x + e^{9x} \\ z(x) = -e^x + e^{9x} \end{cases} \blacktriangleright$$

Завдання для самостійної роботи

Перевірте, чи є вказані функції розв'язками рівнянь:

1. $y = \sqrt{x^2 + C}$, $yy' = x$.

2. $y = \frac{C}{\cos x}$, $y' - y \cdot \operatorname{tg}(x) = 0$.

3. $y = x + Ce^x$, $(x - y + 1)y' = 1$.

4. $y = e^{\arcsin Cx}$, $xy' = y \cdot \operatorname{tg}(\ln y)$.

У наступних рівняннях знайдіть:

1) загальні розв'язки рівнянь; 2) частинні розв'язки за початкової умови $y(-2) = 4$.

5. $xy' + y = 0$.

6. $yy' + x = 0$.

Знайдіть загальні розв'язки рівнянь:

7. $(1 + y^2) dx = (1 + x^2) dy$.

8. $y - xy' = 1 + x^2 y'$.

9. $e^y (1 + x^2) dy - 2x (1 + e^y) dx = 0$.

10. Дріжджі в цукровому розчині ростуть так, що їхня маса збільшується зі швидкістю, яка дорівнює половині маси в момент часу t . Опишіть зміну маси дріжджів із часом за допомогою диференціального рівняння і знайдіть його загальний розв'язок.

11. В експерименті з голодуванням маса піддослідного пацієнта за 30 днів зменшилася зі 120 кг до 90 кг. Щоденні втрати маси, згідно зі спостереженнями, були пропорційні масі піддослідного пацієнта. Запишіть диференціальне рівняння, яке описує зміну маси цього пацієнта із часом. Чому дорівнюватиме маса піддослідного пацієнта через 15 днів голодування?

12. Популяція мікроорганізмів зростає від початкового розміру 10 особин до $N(t)$ особин за час t . Відомо, що швидкість зростання в момент часу t становить $N'(t) = 2t + 3t^2$. Якою буде чисельність популяції через: а) 1 день; б) 5 днів?

13. Знайдіть приріст чисельності популяції бактерій за проміжок часу від 0 до 10 днів, якщо відома швидкість зміни чисельності популяції $N'(t) = 10e^{0,1t}$.

14. У популяцію занесено вірусну інфекцію. Кількість особин N , які хворіють, змінюється із часом t за законом $N'(t) = \frac{1-N(t)}{3}$, $N(0) = 10$. За який час кількість особин, які перехворіли, досягне 70 %?

15. Розглянемо ген із двома алелями, які в деякій популяції в момент часу t описуються частотами $y(t)$ і $z(t) = 1 - y(t)$, відповідно. Припустимо, що перша алель мутує в іншу з імовірністю μ (частота мутації), тобто $y' = -\mu y$. Виразіть $y(t)$ і $z(t)$ через величину μ , якщо $y(0) = z(0) = 0,5$. Виразіть через величину μ час, необхідний для того, щоб $y(t)$ зменшилася вчетверо.

Знайдіть частинні розв'язки рівнянь, які задовольняють указані початкові умови:

16. $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x$, $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1/2$.

17. $(1+e^x)yy' = e^x$, $y(0) = 1$.

18. $y' = 2\sqrt{y} \ln x$, $y(e) = 1$.

19. $y' \operatorname{tg} x - y = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

Знайдіть загальні розв'язки рівнянь:

20. $y' + x^2 y = x^2$.

21. $xy' + y = e^x$.

22. $y' \cos x - y \sin x = \sin 2x$.

23. $xy' + y = \ln x + 1$.

24. $y' + \frac{2y}{x} = \frac{e^{-x^2}}{x}$.

25. $y' - y \cdot \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$.

26. Нехай у стерильній посудині одночасно відбуваються поділ і загибель бактеріальних клітин. Припустимо, що швидкість загибелі клітин прямо пропорційна їхній кількості (x), а швидкість зростання кількості клітин завдяки їх поділу – квадрату кількості клітин (x^2). Тоді нелінійне диференціальне рівняння, яке описує зміну кількості клітин x у такій системі, матиме вигляд $dx/dt = -bx + ax^2$. Тут a і b – коефіцієнти швидкості поділу й загибелі клітин, відповідно. Розв'язати це нелінійне диференціальне рівняння за початковою умови $x(0) = x_0$ та побудувати графік шуканої функції $x(t)$ за таких параметрів моделі: $a = 1$, $b = 0,2$ та $x(0) = 10$.

27. Бактерії, які є їжею для популяції найпростіших, надходять в експериментальне середовище з постійною швидкістю $\omega > 0$. Установлено, що їх споживають зі швидкістю, пропорційною квадрату їхньої концентрації. Отже, динаміку концентрації $y(t)$ бактерій у середовищі можна описати рівнянням $y' = \omega - \beta y^2$, де $\beta > 0$ – стала величина. Знайдіть концентрацію $y(t)$ бактерій, припустивши, що початкова концентрація $y(0) = y_0$. Визначіть рівноважну концентрацію бактерій.

28. Припустимо, що в популяцію з n індивідуумів, сприйнятливих до вірусної інфекції, вводять один інфікований індивідуум. Позначимо через $y(t)$ чисельність неінфікованих (здорових) індивідуумів у момент часу t . За умови, що інфекція поширюється на всіх індивідуумів, функція $y(t)$ буде спадати від значення $y(0) = n$ до нуля. Чисельність здорових індивідуумів задовольняє рівняння $y' = -ky(n+1-y)$, де $k > 0$ – швидкість інфікування індивідуумів у досліджуваній популяції. Розв'яжіть це модельне диференціальне рівняння і знайдіть максимальне значення швидкості поширення інфекції.

29. Ріст, виживаність і поділ клітин напряму залежать від кількості потрапляння поживних речовин крізь мембрану клітини. Можна припустити, що зростання маси клітини пропорційне площі її сферичної поверхні. Тоді маса клітини $m(t)$ у момент часу t задовольняє рівняння $m' = k \cdot m^{2/3}$, де $k > 0$ – стала величина. Знайдіть розв'язок цієї модельної задачі, якщо відома початкова маса $m(0) = m_0$. Визначте час, за який маса клітини подвоюється, якщо $k = 3$ і $m(0) = 1$.

30. Розглянемо біохімічні реакції, у яких окремі речовини є каталізаторами власного утворення. Якщо $y(t)$ – кількість такого продукту в момент часу t , то моделлю відповідної реакції буде рівняння $y' = ky(y-c)$, де $k > 0$ і $c > 0$ – сталі величини (реакція припиняється при $y = c$ унаслідок вичерпання одного з її компонентів). Знайдіть розв'язок цього рівняння за припущення, що $k = 1$, $c = 100$ та $y(0) = 20$.

Перевірте, чи будуть указані функції загальними розв'язками рівнянь:

31. $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, $y'' - 5y' + 6y = 0$.

32. $y = C_1 x + C_2 \ln x$, $x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = 0$.

Розв'яжіть рівняння:

33. $y'' + 8y' + 25y = 0$.

34. $y'' - 2y' + 2y = 0$.

35. $y'' - 4y = 0$.

36. $y'' + 4y' = 0$.

37. $y'' - 5y' + 6y = 13 \sin 3x$.

38. $y'(4 + x^2) + y^2 = 0$, $y(2) = \frac{8}{\pi}$.

39. $x\sqrt{25 - y^2} - e^{-x}y' = 0$, $y(0) = 0$.

40. $xy' - y = x\sqrt{x}$.

41. $xy' + y = \ln x + 1$.

42. $y'' = \ln x$.

43. $y'' + 9y = 0$.

44. $y'' + 4y' + 10y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \sqrt{6}$.

45. $y'' + y' - 12y = 0$.

46. $y'' + 2y' + y = 0$.

47. $y'' + y' + y = 3 \cos 2x$.

Розв'яжіть системи рівнянь:

48.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = 4y - z, \\ \frac{dz}{dx} = y + 2z. \end{cases}$$

49.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = -y - 2z, \\ \frac{dz}{dx} = 3y + 4z. \end{cases}$$

50.
$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = z, \\ \frac{dz}{dx} = y. \end{cases}$$

ПРИКЛАДИ КОНТРОЛЬНИХ МОДУЛІВ ЗА ТЕМАТИКОЮ РОЗДІЛІВ 1–3

МОДУЛЬ 1

Завдання 1. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку перетину прямих $x - 2y + 3 = 0$ та $-2x + y + 3 = 0$ і перпендикулярна прямій $x - \frac{1}{3}y + 2 = 0$.

Завдання 2. Розв'язати рівняння $\begin{vmatrix} x^2 - 1 & -2 \\ x & 3 \end{vmatrix} = 5$.

Завдання 3. Знайти похідну функції

$$y(x) = 2\sqrt[5]{x} + \frac{3x^2}{x+1} - 4\ln(2x) + 2xe^{-3x}.$$

Завдання 4. Розкласти функцію в ряд Тейлора в околі точки $x_0 = 1$ з точністю до квадратичного доданка: $f(x) = 2\sin(3x + 1)$.

Завдання 5. Побудувати графік функції $y(x) = \frac{2x^2 - 1}{1 + x}$.

МОДУЛЬ 2

Завдання 1. Знайти частинні похідні першого порядку таких функцій:

1.1. $z(x, y) = 5x^2y - 7x + 8y + \frac{12}{xy} + 10$.

1.2. $z(x, y) = 4e^{-x^2+y^2} (3x + 7y^2)$.

Завдання 2. Обчислити невизначені інтеграли:

2.1. $\int \left(4x^4 - 5x + \frac{10}{x^2} - \frac{2}{3x} + 9 \right) dx$.

$$2.2. \int 5 \cos(2-3x) dx.$$

Завдання 3. Обчислити визначені інтеграли:

$$3.1. \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x^3}{1-2x^2} dx.$$

$$3.2. \int_1^2 3e^{-3x+4} dx.$$

МОДУЛЬ 3

Завдання 1. Знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь:

$$1.1. 5yy' - \frac{2}{1-3x} = 0.$$

$$1.2. 2y' + y \sin 2x = 0.$$

Завдання 2. Знайти частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

$$2.1. e^{-2y} y' + x^2 + 1 = 0, \quad y(0) = 2.$$

$$2.2. y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

РОЗДІЛ 4

ВИКОРИСТАННЯ МАТЕМАТИЧНИХ ПІДХОДІВ У БІОЛОГІЇ

У цьому розділі на вибраних конкретних прикладах буде продемонстровано, яким чином, використовуючи математичний апарат, можна одержати інформацію щодо кількісних закономірностей перебігу й характеристик низки біологічних процесів.

4.1. Розрахунок параметрів емпіричної кінетичної кривої у фізико-хімічній біології

Часто у фізико-хімічній біології при дослідженні біохімічних і біофізичних процесів експериментатори, вивчаючи залежність будь-якого параметра реакції p (вміст чи концентрація метаболіту, оптична густина, інтенсивність флуоресценції, зсув рівня рН, в'язкість тощо) від часу t , одержують монотонну опуклу до верху графічну залежність $p(t)$, яка має тенденцію до насичення (у часі), що відповідає значенню $p = p_{\max}$ (рис. 4.1). Узагалі кажучи, така крива може бути одержана методом неперервної реєстрації (з використанням спектрофлуориметрії, потенціометрії або турбодиметрії) або по точках, наприклад методом відбору пробних аліквот із середовища інкубації через певні інтервали часу (звичайно таку процедуру проводять за умови, що сукупний об'єм аліквот значно менший, ніж об'єм середовища інкубації).

Причини виникнення такого плато можуть бути різними: термінація (зупинка) кінетичного процесу, перехід його у рівноважний чи стаціонарний стан тощо. Зазвичай устанавлення величини p_{\max} може становити неабияку проблему, оскільки в експерименті її визначення часто потребує тривалого дослідження.

Безперечно, на перших етапах дослідження експериментатор може й не знати молекулярного механізму процесу, який вивчає, проте слушною є постановка питання щодо його емпіричної (феноменологічної, макроскопічної) кількісної характеристики. Це важливо, зокрема, у випадку проведення порівняльних експериментів із використанням класичних діад на кшталт "проба – контроль", "норма – патологія".

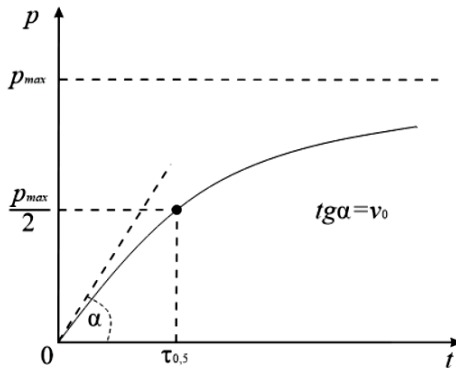


Рис. 4.1. Емпірична кінетична крива: p – експериментальний параметр, що реєструється із часом t ; p_{\max} – платове (у часі) значення параметра p ; $\tau_{0,5}$ – час напівнасичення, за який досягається значення параметра $p = p_{\max} / 2$; α – кут нахилу дотичної до кінетичної кривої на її початку, тобто в момент часу $t = 0$; v_0 – початкова швидкість процесу

Узагалі кажучи, кінетичну криву, що обговорюється, можна охарактеризувати трьома кількісними емпіричними параметрами: максимальна (платова) величина параметра p_{\max} , характеристичний час процесу $\tau_{0,5}$ і початкова швидкість процесу

$$v_0 = \left. \frac{dp}{dt} \right|_{t=0}, \text{ причому } v_0 = \operatorname{tg} \alpha \text{ (див. рис. 4.1).}$$

Виявляється, що в найпростішому випадку зазначену кінетичну криву $p(t)$ часто можна описати тривіальним емпіричним співвідношенням

$$p(t) = \frac{p_{\max} t}{\tau_{0,5} + t}. \quad (4.1)$$

Насамперед виникає запитання: яким є критерій того, що співвідношення (4.1) достовірно описує експериментальний графік, зображений на рис. 4.1? Тут можна використати *лінеаризований підхід*. Зі співвідношення (4.1) маємо:

$$\frac{p}{t} = \frac{p_{\max}}{\tau_{0,5} + t} = \frac{p_{\max}}{\tau_{0,5}} - \frac{p}{\tau_{0,5}}. \quad (4.2)$$

Тоді очевидним є твердження: якщо співвідношення (4.1) дійсно описує кінетичний графік, наведений на рис. 4.1, то його можна лінеаризувати в координатах $(p/t; p)$ (рис. 4.2).

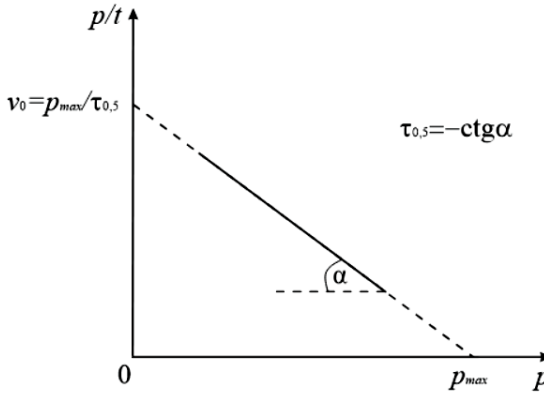


Рис. 4.2. Лінеаризація, відповідно до співвідношення (4.2), кінетичного графіка, зображеного на рис. 4.1

Відповідно до співвідношення (4.2) величина максимального (платового) значення параметра p_{\max} , що реєструється, визначається шляхом екстраполяції лінійного графіка на вісь абсцис, а значення характеристичного часу $\tau_{0,5} = -\text{ctg}\alpha$ (рис. 4.2).

А як же розрахувати початкову швидкість v_0 процесу? Зі співвідношення (4.1) для миттєвої швидкості v після диференціювання маємо:

$$v = \frac{dp}{dt} = \frac{p_{\max}(\tau_{0,5} + t) - p_{\max}t}{(\tau_{0,5} + t)^2} = \frac{p_{\max}\tau_{0,5}}{(\tau_{0,5} + t)^2}. \quad (4.3)$$

Тоді зі співвідношення (4.3) для початкової швидкості процесу отримаємо:

$$v_0 = \left. \frac{dp}{dt} \right|_{t=0} = \frac{p_{\max}}{\tau_{0,5}}. \quad (4.4)$$

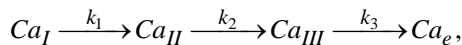
Отже, легко бачити, що значення початкової швидкості v_0 дорівнює вільному доданку в лінеаризованому кінетичному рівнянні (4.2), тобто початкову швидкість можна визначити шляхом екстраполяції лінійного графіка на вісь ординат (рис. 4.2).

4.2. Динамічні закономірності обміну іонів Са у тканинному препараті

Вивчення динамічних закономірностей обміну фізіологічно значущих катіонів, зокрема іонів Са, у тканинах тварин і рослин – одна з класичних проблем біофізичної хімії. Зазвичай у таких дослідженнях використовують методи ізотопного обміну, ультрацитохімії, атомно-абсорбційної спектрофотометрії, електронної мікроскопії, рентгеноструктурного аналізу тощо.

Наприклад, було продемонстровано, що кінетика вивільнення радіоактивного $^{45}\text{Ca}^{2+}$ з гладеньком'язового препарату (200–300 мг) тканини матки кролиць має складний характер: на кривій, яка описує залежність кількості вивільненого $^{45}\text{Ca}^{2+}$ m_e у середовище інкубації, що містить нерадіоактивний $^{40}\text{Ca}^{2+}$, від часу інкубації t , ідентифікують три ділянки, які характеризуються різною швидкістю обміну (рис. 4.3).

Феноменологічний компартменталізаційний аналіз потоків іонів Са у тканині доцільно проводити, ґрунтуючись на уявленні про трьохстадійний послідовний механізм відповідно до такої схеми:



де індекси I, II і III позначають відповідні гіпотетичні кальцієві пули у тканині, Ca_e – радіоактивний кальцій, що вивільнився у

середовище інкубації з м'язового препарату, k_1 , k_2 і k_3 – відповідні константи швидкості першого порядку (розмірність – "час⁻¹"). Тоді, відповідно до закону діючих мас, цю схему можна описати такими диференціальними рівняннями:

$$\begin{aligned} dm_1 / dt &= -k_1 m_1; \\ dm_2 / dt &= k_1 m_1 - k_2 m_2; \\ dm_3 / dt &= k_2 m_2 - k_3 m_3; \\ dm_e / dt &= k_3 m_3, \end{aligned} \quad (4.5)$$

де m_1 , m_2 та m_3 – вміст іонів ^{45}Ca на рівні I-го, II-го і III-го пулів, відповідно, m_e – кількість $^{45}\text{Ca}^{2+}$, що вивільнилася у середовище інкубації.

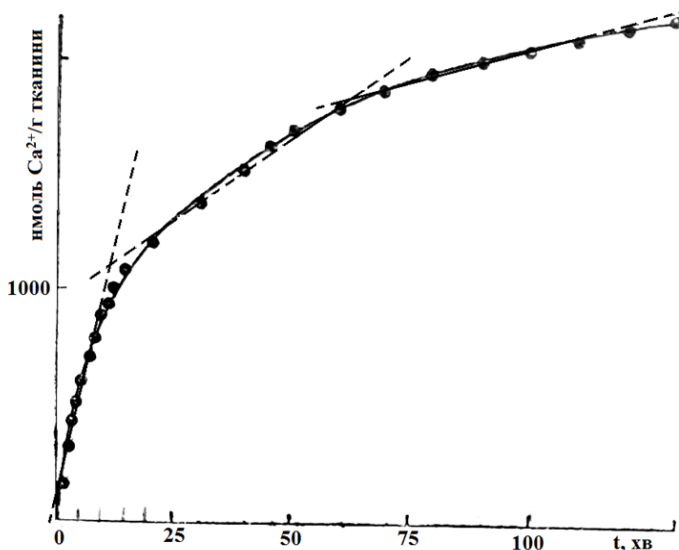


Рис. 4.3. Кінетика вивільнення радіоактивного $^{45}\text{Ca}^{2+}$ з препарату гладенького м'яза в середовище інкубації, що містить нерадіоактивний $^{40}\text{Ca}^{2+}$. Попередньо м'язовий препарат був навантажений $^{45}\text{Ca}^{2+}$ у режимі $^{40}\text{Ca}^{2+}$ - $^{45}\text{Ca}^{2+}$ обміну впродовж 2 год за температури 37°C

Нагадаємо, що характеристичний час процесу τ_i на рівні кожної стадії пов'язаний із величиною константи швидкості k_i таким виразом:

$$\tau_i = \ln 2 / k_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.6)$$

Послідовне розв'язання пов'язаних між собою рівнянь (4.5) дозволяє одержати таку залежність кількості $^{45}\text{Ca}^{2+}$ m_e , що вивільнився у середовище інкубації, із часом t :

$$m_e(t) = m_{e, \max} - Q_1 e^{-t/\tau_1} - Q_2 e^{-t/\tau_2} - Q_3 e^{-t/\tau_3}. \quad (4.7)$$

Тут $m_{e, \max} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = m_{1,0} + m_{2,0} + m_{3,0}$ – максимальна кількість $^{45}\text{Ca}^{2+}$, що вивільнилася в середовище інкубації з м'язового препарату (визначається методом Гугенгейма, який застосовують до фрагмента кривої на рис. 4.3 у діапазоні часу інкубації > 40 хв).

Ураховуючи співвідношення (4.6), легко показати, що величини так званих кальцієвих ємностей відповідних пулів $m_{1,0}$, $m_{2,0}$ і $m_{3,0}$ пов'язані зі значеннями передекспоненційних множників і характеристичними параметрами τ_1 , τ_2 та τ_3 у рівнянні (4.7) таким чином:

$$\begin{aligned} m_{1,0} &= (\tau_2 - \tau_1)(\tau_3 - \tau_1) Q_1 / \tau_1^2, \\ m_{2,0} &= (\tau_1 - \tau_3)\tau_2 Q_1 / \tau_1^2 + (\tau_2 - \tau_3)Q_2 / \tau_2, \\ m_{3,0} &= \tau_3 Q_1 / \tau_1 + \tau_3 Q_2 / \tau_2 + Q_3. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Відповідно до співвідношень (4.8) перебудова графіка, наведеного на рис. 4.3 у напівлогарифмічних координатах ($\ln(m_{e, \max} - m_e); t$) (рис. 4.4), надає можливість ідентифікувати у препараті м'яза парціальні компоненти кальцієвого обміну на рівні його трьох пулів, визначити їхні ємнісні та кінетичні характеристики. При цьому характеристичний час обміну кальцієвих пулів τ_1 , τ_2 і τ_3 визначаємо за значеннями котангенсів кутів нахилу парціальних лінеаризованих складників, а величини передекспоненційних множників Q_1 , Q_2 і Q_3 – за значеннями відрізків, які маємо на вісі ординат за екстраполяції цих лінійних складників на зазначену вісь. Отже, значення кальцієвих ємностей пулів $m_{1,0}$, $m_{2,0}$ і $m_{3,0}$ розраховуємо за формулами (4.8).

Для ємнісних параметрів $m_{1,0}$, $m_{2,0}$ і $m_{3,0}$ у випадку досліджуваного об'єкта були визначені такі величини ($M \pm m; n = 6$): 890 ± 50 , 990 ± 90 і 540 ± 80 мкмоль $\text{Ca}^{2+}/\text{кг}$ маси вологої тканини, відповідно. Розрахунки свідчать, що величина

$m_{e, \max} = m_{1,0} + m_{2,0} + m_{3,0} = 2,4-2,5$ ммоль $\text{Ca}^{2+}/\text{кг}$ маси вологої тканини, яка характеризує вміст іонів Ca у м'язі (слугує його оцінкою). Звичайно, це значення менше загального вмісту Ca^{2+} : наприклад, з використанням методу атомно-абсорбційної спектрофотометрії було доведено, що кількість загального Ca становить 2,6–4,5 ммоль $\text{Ca}^{2+}/\text{кг}$ маси вологої тканини. Значення ж характеристичного часу обміну іонів Ca на рівні пулів I, II і III становлять ($M \pm m$; $n = 6$), відповідно, 180 ± 25 хв ("повільний" пул), 26 ± 1 хв ("проміжний" пул) і $2,9 \pm 0,4$ хв ("швидкий" пул).

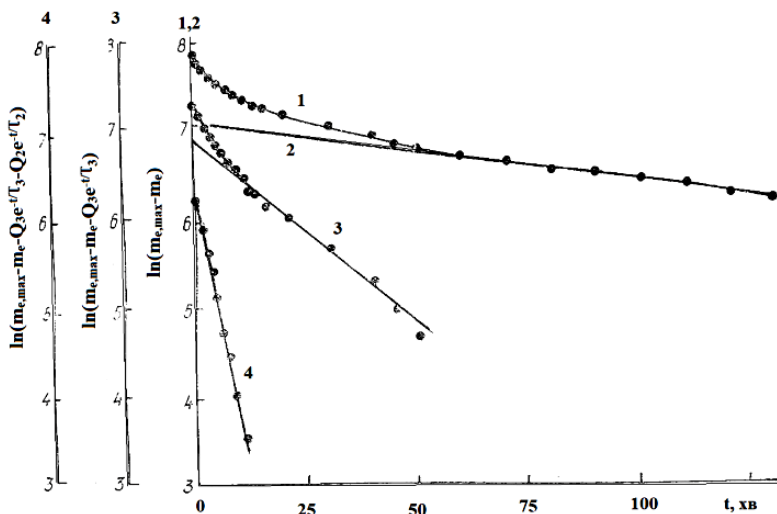


Рис. 4.4. Ідентифікація з використанням напівлогарифмічних координат і компартменталізаційного аналізу кальцієвих пулів у м'язі кролиць із залученням методу графоаналітичного віднімання. Загальному графіку 1 відповідає вісь ординат 1, а його лінійним компонентам 2–4 – осі ординат з аналогічною нумерацією. Компартменталізаційний аналіз проведено відповідно до рівнянь (4.7) і (4.8)

Загалом вищеописаний методичний підхід дає змогу ідентифікувати відносно нешвидкі компоненти обміну іонів Ca у тканині. Залучення ж до вивчення закономірностей обміну іонів Ca

безпосередньо у клітинах Ca^{2+} -чутливих флуоресцентних зондів значно розширює експериментальні підходи, спрямовані на тестування так званих внутрішньоклітинних "кальцієвих транз'єнтів", для яких значення характеристичного часу τ значно менші, ніж наведені вище величини τ_1 , τ_2 і τ_3 .

4.3. Кінетичні закономірності елементарного ензиматичного процесу

Як свідчать результати великої кількості дослідів у галузі ензимології, залежність початкової швидкості ензиматичної реакції v_0 від початкової концентрації субстрату s_0 (за сталої концентрації ензиму f_0), а також залежність цієї швидкості від початкової концентрації ензиму f_0 (за сталої концентрації субстрату s_0), характеризуються канонічними графіками (рис. 4.5, 4.6).

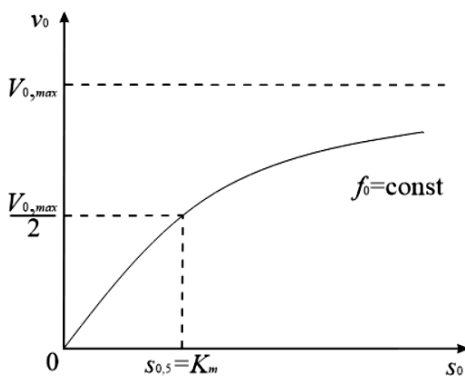


Рис. 4.5. Типова залежність початкової швидкості ензиматичної реакції v_0 від загальної концентрації субстрату s_0 за сталої загальної концентрації ензиму f_0 : $K_m = s_{0,5}$ – константа Міхаеліса, а $V_{0,\text{max}}$ – початкова максимальна швидкість ензиматичної реакції, яку спостерігають за насичених концентрацій субстрату в режимі $s_0 \gg K_m$

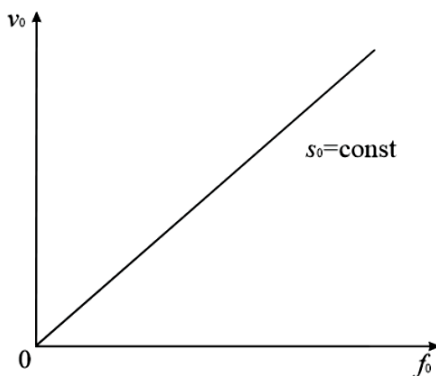
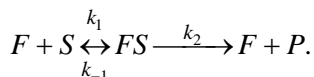


Рис. 4.6. Типова залежність початкової швидкості ензиматичної реакції v_0 від загальної концентрації ензиму f_0 за сталої загальної концентрації субстрату s_0

Отже, типова залежність початкової швидкості ензиматичної реакції v_0 від загальної концентрації субстрату s_0 описується опуклою до верху кривою, яка має тенденцію до виходу (за концентрацією субстрату) на плато, що характеризується значенням $v_0 = V_{0,\max}$ (рис. 4.5), а типова залежність початкової швидкості ензиматичної реакції v_0 від загальної концентрації ензиму f_0 є прямою лінією (рис. 4.6). Утім, потрібно зазначити, що в експериментальній ензимології зустрічаються випадки, які не описуються наведеними канонічними графічними залежностями.

Підходи до вивчення кінетичних закономірностей елементарного ензиматичного процесу ґрунтуються на тому, що він, принаймні, є двохстадійним:



Тут F – ензим, S і P – субстрат і продукт ензиматичної реакції, відповідно, FS – ензим-субстратний комплекс (для багатьох ензиматичних реакцій факт існування такого комплексу доведено експериментально), k_1 – константа швидкості другого порядку (розмірність "концентрація⁻¹·час⁻¹") для стадії адсорбції субстрату S на ензими F , k_{-1} – константа швидкості першого поряд-

ку (розмірність "час⁻¹") для стадії десорбції субстрату S із ензим-субстратного комплексу FS у напрямку звільнення субстрату, k_2 – константа швидкості першого порядку (розмірність "час⁻¹") для стадії каталітичного перетворення субстрату S на продукт P ("каталітична константа").

Якщо маємо мічений субстрат S (з використанням, наприклад, флуоресцентної або радіоактивної мітки), то за умови блокади другої (каталітичної) стадії вищенаведеної реакції ($k_2=0$) можна вивчити за використання методу Скетчарда рівноважний процес на рівні першої стадії, розраховавши K – константу спорідненості (афінітету) субстрату S до ензиму F . В ензимології ця константа має специфічну назву – *субстратна константа*, її позначають як K_s ($K=K_s=k_{-1}/k_1$ – константа дисоціації ензим-субстратного комплексу FS ліворуч). Очевидно, що чим більше значення K_s , тим меншою є спорідненість субстрату S до ензиму F (і навпаки), отже, $K_s \sim 1 / \text{спорідненість}$.

Якщо s_0 та s – загальна концентрація субстрату й концентрація вільного субстрату S , відповідно, p – концентрація продукту P , а z – концентрація ензим-субстратного комплексу FS , то, згідно із законом збереження маси, можемо записати:

$$f_0 = f + z, \quad (4.9)$$

$$s_0 = s + z + p. \quad (4.10)$$

Утім, за реальних експериментальних умов при дослідженнях *in vitro* (дослід ставиться у замкненому біохімічному реакторі – у пробірках, кюветах, комірках) рівняння (4.10) можна суттєво спростити. По-перше, при проведенні реакції у режимі початкової швидкості (малі часи інкубації) продукт реакції P накопичується у значно меншій концентрації p , ніж загальна (початкова) концентрація субстрату s_0 , тобто $p \ll s_0$. По-друге, типові значення концентрації субстратів у біохімічних експериментах *in vitro* становлять 10^{-4} – 10^{-3} М (зазвичай молекулярна вага субстратів сягає 1000), що значно більше, ніж типові значення концентрації очищених ензимів (10^{-7} – 10^{-6} М). Причина цього полягає у тому, що працюючи, наприклад, з очищеними закриталізованими ензимами, експериментатор не може їх використовувати в таких концентраціях, у яких використовує субстрати, –

адже білки, у тому числі ензими, мають дуже високу молекулярну вагу (напр., інсулін має молекулярну масу 5700, тоді як сироватковий альбумін – 69000). Тому, очевидно, концентрація ензим-субстратного комплексу z не може перевищувати загальну концентрацію ензиму: $f_0 \ll s_0$. Беручи до уваги зазначені обмеження, балансове рівняння (4.10) у випадку використання режиму реєстрації початкової швидкості ензиматичної реакції можна записати у вигляді

$$s_0 = s. \quad (4.11)$$

З урахуванням виразу (4.11) швидкість зміни концентрації z ензим-субстратного комплексу FS описується, відповідно до закону діючих мас, диференціальним рівнянням

$$dz/dt = k_1 f s_0 - (k_{-1} + k_2) z. \quad (4.12)$$

У режимі стаціонарності, який, зазвичай, властивий ензиматичним реакціям, $dz/dt = 0$. Тому, відповідно до співвідношення (4.12), для значення концентрації ензим-субстратного комплексу z у стаціонарному режимі будемо мати

$$z = f s_0 / K_m, \quad (4.13)$$

де $K_m = (k_{-1} + k_2) / k_1$ – константа Міхаеліса, яка має концентраційну розмірність; зазвичай типові значення K_m у випадку різних ензиматичних реакцій становлять 10^{-6} – 10^{-2} М.

Утім, беручи до уваги балансове співвідношення (4.9) і вираз (4.13), можемо записати:

$$f_0 = f + f s_0 / K_m = f (K_m + s_0) / K_m,$$

звідки для концентрації вільного ензиму f маємо:

$$f = K_m f_0 / (K_m + s_0). \quad (4.14)$$

З урахуванням співвідношень (4.13) і (4.14) початкова швидкість v_0 ензиматичної реакції (4.10) визначається виразом

$$v_0 = \left. \frac{dp}{dt} \right|_{t=0} = k_2 z = k_2 f s_0 / K_m = k_2 f_0 s_0 / (K_m + s_0). \quad (4.15)$$

Співвідношення (4.15) має назву *рівняння Міхаеліса – Ментен* і є основним рівнянням кількісної ензимології, яке встановлює залежність початкової швидкості ензиматичної реакції v_0 від концентрації ензиму f_0 і концентрації субстрату s_0 .

Розглянемо два випадки перебігу ензиматичного процесу.

1. Застосуємо високі концентрації субстрату s_0 , що відповідає умові значного насичення ензиму F субстратом S : $s_0 \gg K_m$. Тоді з рівняння (4.15) для значення початкової швидкості v_0 ензиматичної реакції маємо вираз

$$v_0 = k_2 f_0 = V_{0, \max}, \quad (4.16)$$

де $V_{0, \max}$ – початкова максимальна швидкість ензиматичної реакції. Як можна бачити зі співвідношення (4.16), цей параметр прямо пропорційний концентрації ензиму f_0 , але не залежить від концентрації субстрату s_0 (тобто маємо платове значення початкової швидкості v_0). Отже, при використанні великих концентрацій субстрату зазначені закономірності повністю описують експериментальний графік, наведений на рис. 4.5.

Використовуючи рівняння (4.16), перепишемо рівняння Міхаеліса – Ментен (4.15) у такому вигляді:

$$v_0 = V_{0, \max} s_0 / (K_m + s_0). \quad (4.17)$$

Можна дати феноменологічне (макроскопічне, емпіричне) тлумачення константи Міхаеліса K_m . Сформулюємо запитання: за якої концентрації субстрату s_0 початкова швидкість ензиматичної реакції v_0 буде відповідати значенню $V_{0, \max} / 2$?

З рівняння (4.17) випливає: $v_0 = V_{0, \max} / 2$, коли K_m відповідає деякій концентрації субстрату $s_{0,5}$ (рис. 4.5). Звідси маємо феноменологічне визначення константи Міхаеліса: K_m чисельно дорівнює такій концентрації субстрату $s_{0,5}$, за якої початкова швидкість ензиматичної реакції v_0 буде дорівнювати половині значення початкової максимальної швидкості ензиматичної реакції, тобто $v_0 = V_{0, \max} / 2$.

2. Використаємо малі концентрації субстрату s_0 , що відповідає умові значного ненасичення ензиму F субстратом S : $s_0 \ll K_m$. Тоді з рівняння (4.16) маємо:

$$v_0 = V_{0, \max} s_0 / K_m. \quad (4.18)$$

Як бачимо, величина v_0 лінійно зростає зі збільшенням концентрації ензиму f_0 (оскільки $V_{0, \max} = k_2 f_0$) і прямо пропорційна концентрації субстрату s_0 . Отже, при використанні малих концентрацій субстрату зазначені концентраційні закономірності повністю описують експериментальний графік, наведений на рис. 4.6.

4.4. Кінетичні закономірності елементарного оборотного односубстратного ензиматичного процесу

Якщо дослідник, який вивчає ензиматичну реакцію, працює не в режимі визначення її початкової швидкості, а реєструє накопичення продукту реакції P (чи зменшення концентрації субстрату S) упродовж достатньо тривалого часу t , то ця реакція перейде у стан рівноваги (нагадаємо, що ензим каталізує реакцію у два боки – як зліва направо, так і справа наліво) (рис. 4.7).

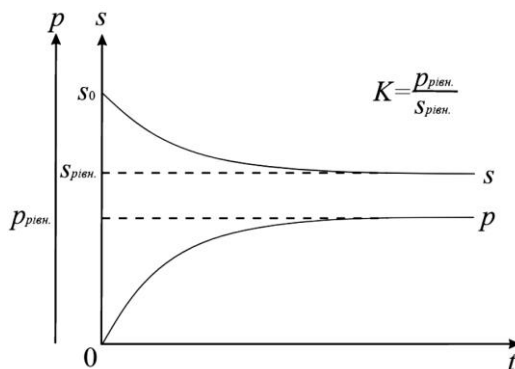
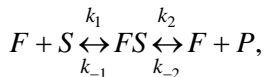


Рис. 4.7. Кінетичні криві у випадку оборотної односубстратної ензиматичної реакції: s та p – концентрації субстрату та ензиму, відповідно, s_0 – початкова концентрація субстрату S , $s_{рівн.}$ і $p_{рівн.}$ – рівноважні концентрації субстрату і продукту, відповідно, $K = p_{рівн.} / s_{рівн.}$ – безрозмірна константа рівноваги ензиматичної реакції.

У цьому випадку реакція матиме вигляд



де k_{-2} – константа швидкості другого порядку ресинтезу ензим-субстратного комплексу FS унаслідок взаємодії ензиму F і продукту реакції P . Вищенаведена реакція є оборотною односубстратною ензиматичною реакцією. Наведемо її кількісну інтерпретацію.

Якщо f_0 і f – загальна концентрація ензиму і концентрація вільного ензиму F , відповідно, s_0 і s – загальні концентрації субстрату і вільного субстрату S , відповідно, p – концентрація продукту P , а z – концентрація ензим-субстратного комплексу FS , то, згідно із законом збереження маси, можемо записати, пам'ятаючи, що $f_0 \ll s_0$:

$$f_0 = f + z, \quad (4.19)$$

$$s_0 = s + z + p \approx s + p. \quad (4.20)$$

Диференціальні рівняння, що описують зміну концентрацій реагентів у випадку вищенаведеної оборотної реакції, мають вигляд

$$\begin{aligned} ds / dt &= k_{-1}z - k_{-1}fs, \\ dp / dt &= k_2z - k_{-2}fp, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$dz/dt = k_1fs + k_{-2}fp - (k_{-1} + k_2)z.$$

Можна показати, що, відповідно до рівнянь (4.19)–(4.21), за режиму стаціонарності ($dz/dt = 0$) і реєстрації ензиматичної реакції за збільшення концентрації p продукту реакції P для миттєвої швидкості процесу $v = dp / dt$ справедливий такий вираз:

$$v = \frac{(\bar{V}_{0,\max} / \bar{K}_m) s - (\bar{V}_{0,\max} / \bar{K}_m) p}{1 + s / \bar{K}_m + p / \bar{K}_m}. \quad (4.22)$$

У рівнянні (4.22) використано позначення, виходячи з режиму початкової швидкості та принципу симетрії оборотної реакції

$$\bar{V}_{0,\max} = k_2 f_0 \quad \text{і} \quad \bar{V}_{0,\max} = k_{-1} f_0 \quad (4.23)$$

– значення початкових максимальних швидкостей реакції у випадку, коли реакцію тестують за накопиченням продукту P (рух зліва направо, реакція запускається додаванням аліквоти розчину ензиму до розчину субстрату за початкової концентрації s_0) або субстрату S (рух справа наліво, реакція запускається додаванням аліквоти розчину ензиму до розчину продукту за початкової концентрації p_0), відповідно;

$$\bar{K}_m = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1} \quad \text{і} \quad \bar{K}_m = \frac{k_{-1} + k_2}{k_{-2}} \quad (4.24)$$

– відповідні значення констант Міхаеліса.

Значимо, що значення $\bar{V}_{0,\max}$, \bar{K}_m і $\bar{V}_{0,\max}$, \bar{K}_m легко можуть бути розраховані в експерименті (напр. методом Лайнуївера – Берка).

У стані рівноваги маємо: $(dp / dt)_{\text{рівн.}} = 0$. Тоді з рівняння (4.22) випливає

$$(\bar{V}_{0,\max} / \bar{K}_m) s_{\text{рівн.}} = (\bar{V}_{0,\max} / \bar{K}_m) p_{\text{рівн.}}, \quad (4.25)$$

де $s_{\text{рівн.}}$ і $p_{\text{рівн.}}$ – рівноважні концентрації субстрату і продукту реакції, відповідно (рис. 4.7). Для константи рівноваги $K = p_{\text{рівн.}} / s_{\text{рівн.}}$ вищенаведеної реакції будемо мати такий вираз:

$$K = \frac{\bar{V}_{0,\max} \bar{K}_m}{\bar{V}_{0,\max} \bar{K}_m}. \quad (4.26)$$

Константа рівноваги K характеризує напрямок, у якому зсунута ця рівновага. Якщо $K > 1$, то рівновага зсунута праворуч (у напрямку утворення продукту реакції P), якщо $K < 1$, то ліворуч (у напрямку утворення субстрату реакції S).

4.5. Багатопараметричний аналіз механокінетики скорочення-розслаблення гладеньких м'язів

Механокінетичний аналіз процесу скорочення-розслаблення м'язів, зокрема гладеньких, у модельних дослідах *in vitro* – важливий етап для з'ясування феноменології та механізму явища електро- і фармако механічного спряження, вивчення дії фізіологічно активних і фармакологічних сполук на скоротливу активність м'язів. В ізометричному режимі реєстрації скоротливої активності типова механокінетична крива $f=f(t)$ процесу скорочення-розслаблення гладенького м'яза є доволі складною (f – сила, t – час) і характеризується двома точками перегину на рівні фази скорочення (координата $(F_C; \tau_C)$) і фази розслаблення (координата $(F_R; \tau_R)$), де F та τ – відповідно значення сили f

і часу t у точках перегину, $\left(\frac{d^2 f}{dt^2} \right)_{\tau_C, \tau_R} = 0$, а також точкою

екстремуму – максимуму F_{\max} сили f у момент часу $t = \tau_0$,
 $\left(\frac{df}{dt}\right)_{\tau_0} = 0$ (рис. 4.8).

У найпростішому випадку одне з емпіричних співвідношень, що потенційно може задовольняти вищезазначені кінетичні закономірності, властиві кривій скорочення-розслаблення гладенького м'яза, має такий вигляд

$$f = A \cdot t^n \cdot e^{-kt}, \quad (4.27)$$

де A , n і k – деякі сталі.

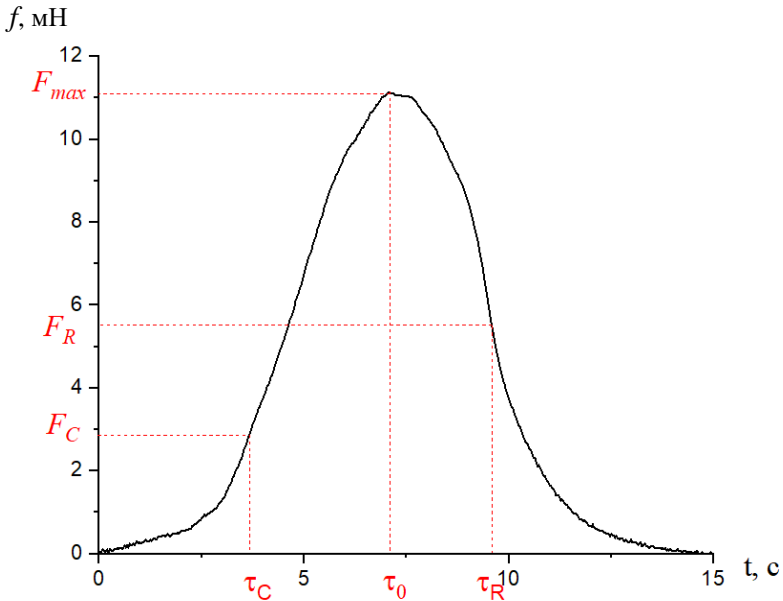


Рис. 4.8. Повна ізометрична механокінетична крива процесу скорочення-розслаблення гладенького м'яза антрального відділу шлунка (antrum) (як приклад). Тут f і t – миттєві значення сили й часу на рівні скоротливого циклу; F_C та F_R – значення сили в точках перегину на рівні фаз скорочення і розслаблення у моменти часу τ_C і τ_R , відповідно; F_{\max} – максимальне значення сили f у момент часу τ_0

Із співвідношення (4.27) для сталої A безпосередньо маємо такі вирази:

$$A = \left(\frac{ke}{n} \right)^n F_{\max}, \quad (4.28)$$

де

$$\tau_0 = \frac{\tau_C + \tau_R}{2} = \frac{n}{k}, \quad \tau_C = \frac{n - \sqrt{n}}{k}, \quad \tau_R = \frac{n + \sqrt{n}}{k}, \quad (4.29)$$

звідки

$$\begin{aligned} \tau_0 - \tau_C &= \frac{\sqrt{n}}{k}, \quad \tau_R - \tau_0 = \frac{\sqrt{n}}{k}, \quad \tau_R - \tau_C = 2 \frac{\sqrt{n}}{k}, \\ \frac{\tau_R - \tau_C}{\tau_R - \tau_0} &= 2, \quad \frac{\tau_R - \tau_0}{\tau_0 - \tau_C} = 1. \end{aligned} \quad (4.30)$$

З виразів (4.29) і (4.30) маємо співвідношення для емпіричних констант n і k :

$$n = \left(\frac{\tau_0}{\tau_R - \tau_0} \right)^2 = \left(\frac{\tau_0}{\tau_0 - \tau_C} \right)^2, \quad (4.31)$$

$$k = \frac{\tau_0}{(\tau_R - \tau_0)^2} = \frac{\tau_0}{(\tau_0 - \tau_C)^2}. \quad (4.32)$$

Як бачимо, значення констант n та k , що входять до емпіричного рівняння (4.27),

$$f = F_{\max} \cdot \left(\frac{kt}{n} \right)^n \cdot e^{n-kt} \quad (4.33)$$

визначаються виключно часовими параметрами механокінетичної кривої (рис. 4.8) – τ_C , τ_R і τ_0 .

Миттєва швидкість зміни механічної напруги гладенького м'яза у процесі скорочення-розслаблення $v = \frac{df}{dt}$, відповідно до виразу (4.33), становить

$$v = F_{\max} \cdot \left(\frac{kt}{n} \right)^n \cdot e^{n-kt} \cdot \left(\frac{n}{t} - k \right), \quad (4.34)$$

причому $v > 0$ при $t < \tau_0$; $v < 0$ при $t > \tau_0$.

Тоді, беручи до уваги вираз (4.34), маємо:

$$v = f \cdot \frac{n - kt}{t}. \quad (4.35)$$

Універсалізм цього характеристичного рівняння полягає у тому, що воно дає можливість за ізометричного режиму розрахувати значення миттєвої швидкості зміни механічної напруги вісцерального гладенького м'яза (у будь-який момент часу t) у випадку повної механокінетичної кривої за вимірюваним значенням сили f і за певних величин констант n і k .

З рівняння (4.35), яке, по суті, є головним узагальнювальним рівнянням скорочення-розслаблення вісцерального гладенького м'яза за ізометричних умов, випливає:

$$\frac{v}{f} = \frac{n}{t} - k. \quad (4.36)$$

Звідси маємо таку емпіричну закономірність спонтанного скорочення-розслаблення вісцерального гладенького м'яза у випадку ізометричного режиму: для повної механокінетичної кривої у будь-який момент часу t відношення миттєвої швидкості v зміни сили до миттєвого значення сили f змінюється обернено пропорційно часу скоротливого процесу.

Відповідно до рівнянь (4.33) та (4.30) для сили $f = F_C$ у точці перегину ($t = \tau_C$) на рівні фази скорочення механокінетичної кривої маємо:

$$F_C = F_{\max} \cdot \left(\frac{n - \sqrt{n}}{n} \right)^n \cdot e^{\sqrt{n}}. \quad (4.37)$$

Аналогічно для сили $f = F_R$ у точці перегину ($t = \tau_R$) на рівні фази розслаблення механокінетичної кривої маємо:

$$F_R = F_{\max} \cdot \left(\frac{n + \sqrt{n}}{n} \right)^n \cdot e^{-\sqrt{n}}. \quad (4.38)$$

Вищеописаний підхід до вивчення дії фізико-хімічних факторів, фізіологічно активних і фармакологічних сполук на механокінетику скоротливої відповіді гладенького м'яза матки шурів був апробований в експериментах (С. Костерін, О. Цимбалюк). Зокрема, було проаналізовано ефект збільшення концентрації у позаклітинному середовищі такого фізико-хімічного чинника, як іони Mg^{2+} , на механокінетичні параметри спонтанних скорочень

гладенького м'язу матки. Як відомо, розчин сульфату магнію широко використовують у медицині як міорелаксант, зокрема як токолітик, оскільки іони Mg^{2+} пригнічують іонні струми через іонні канали (напр. потенціалкеровані Ca^{2+} -канали L-типу, Na^{+} - і K^{+} -канали), знижують активність фосфоліпази С, активують АТФ-азу міозину й системи первинного активного іонного транспорту плазматичної мембрани.

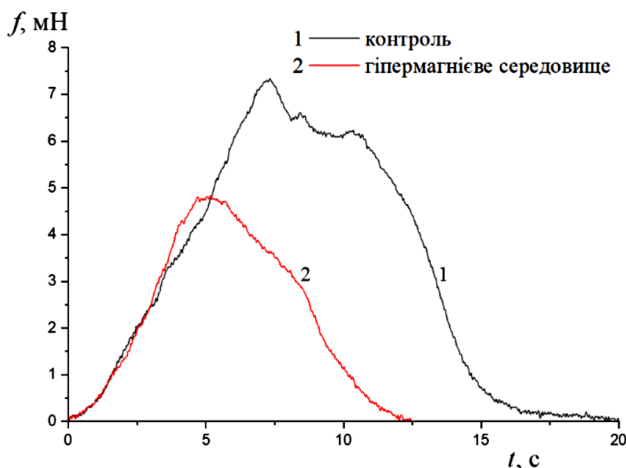


Рис. 4.9. Вплив іонів Mg^{2+} в розчині, який омиває гладеньком'язовий препарат, на механокінетику скоротливої відповіді міометрія: 1 – контроль (концентрація іонів Mg^{2+} 1,2 мМ); 2 – дія гіпермагнієвого середовища (концентрація іонів Mg^{2+} 5,0 мМ). У випадку механокінетичних кривих 1 і 2 значення параметрів n та k становлять 2,55 та $0,33\text{ с}^{-1}$ і 3,28 та $0,67\text{ с}^{-1}$, відповідно, а величини F_{\max} – 7,3 і 4,8 мН, відповідно

Як видно з рис. 4.9, підвищення концентрації іонів Mg^{2+} в омиваючому гладеньком'язові препарати розчині в понад чотири рази (з 1,2 до 5,0 мМ) супроводжується пригніченням їхньої спонтанної скоротливої активності. Зокрема, це позначається на значному зниженні амплітуди скорочення F_{\max} (у середньому на 30 %).

Розрахунок часових, силових і швидкісних параметрів скорочення *uterus* за дії підвищеної концентрації іонів Mg^{2+} дозволив виявити такі закономірності. По-перше, відбувається значне

зниження усіх часових і амплітудних силових параметрів, що, імовірно, указує на наявність у гладенькому м'язі принаймні кількох "мішеней", чутливих до дії іонів Mg^{2+} і залучених у формування спонтанного скорочення як на рівні фази скорочення, так і фази розслаблення. Водночас незначні зміни спостерігали у випадку швидкісних параметрів скорочення.

Теоретичні засади зазначеної багатofакторної моделі були апробовані також у випадку спонтанних скорочень препаратів міометрія щурів за короткочасної дії (упродовж 30 хв) на них наночастинок калікс[4]арену C-90 у концентрації 100 мкМ (рис. 4.10).

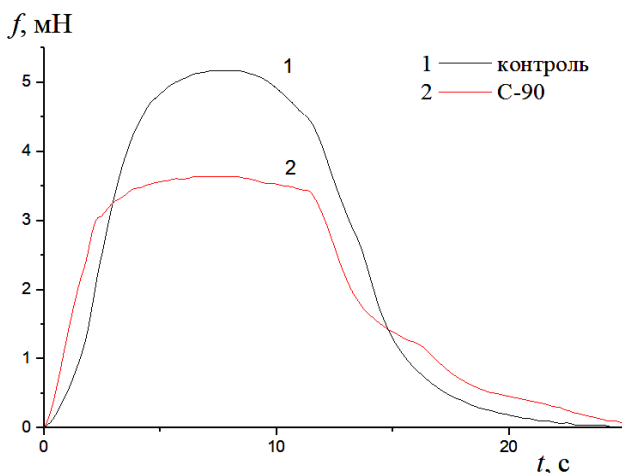


Рис. 4.10. Вплив калікс[4]арену C-90 у концентрації 0,1 мМ на механокінематику скоротливої відповіді поздовжніх гладеньких м'язів матки щурів: 1 – контроль, 2 – дія каліксарену C-90. У випадку механокінетичних кривих 1 і 2 значення параметрів n та k становлять 2,54 та 0,38 c^{-1} і 1,64 та 0,30 c^{-1} , відповідно, а величини F_{max} – 5,17 і 3,65 мН, відповідно

Дослідженнями *in vitro* було доведено, що калікс[4]арен володіє здатністю вибіркового (щодо інших систем активного іонного транспорту) інгібування Mg^{2+} , АТФ-залежної Ca^{2+} -помпи плазматичної мембрани й активації АТФ-ази міозину: аплікування до м'язового препарату С-90 зумовлювало пригнічення амплітуди F_{max} спонтанних скорочень, а також інших амплітудних пара-

метрів (показників F_C і F_R); водночас часові параметри за дії калікс[4]арену C-90 залишалися на рівні контрольних. Отже, зазначена сполука є перспективною для створення ліків – регуляторів скоротливої функції гладенького м'яза.

Отже, апробація багатопараметричного аналізу механокінетики кривої процесу скорочення-розслаблення вісцеральних гладеньких м'язів щурів свідчить про здатність зазначеного кількісного підходу здійснювати вичерпний опис механограм, а також застосовувати цей аналіз для передбачення молекулярних мішеней у випадку модуляції скоротливої активності при дослідженні дії фізико-хімічних, метаболічних і фармакологічних чинників на електро- та фармакомеханічне спряження.

4.6. Математична модель загоєння рани

У пропонованій *моделі загоєння рани* розглядають вплив некротизованої тканини на процес загоєння рани.

Відомо, що після утворення рани процес її загоєння значно пришвидшується, якщо видаляти відмерлу тканину з поверхні. Нехай x – площа поверхні рани, а y – площа, яку займає некротизована тканина. Модель базується на таких припущеннях:

- загоєння рани із часом відбувається за лінійним законом;
- змертвілі рештки загальмовують процес загоєння рани;
- збільшення площі новоутвореної некротизованої тканини

прямо пропорційне площі поверхні рани.

У результаті одержимо систему нелінійних диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha x + \beta xy \\ \frac{dy}{dt} = \gamma x - fy, \end{cases} \quad (4.39)$$

де $\alpha > 0$ – швидкість загоєння рани за відсутності некрозу, $\beta > 0$ – ефективність взаємодії між раною та змертвілими рештками, унаслідок чого загальмовується процес загоєння, $\gamma > 0$ – швидкість утворення некротизованої тканини і, нарешті, $f > 0$ – швид-

кість зменшення змертвілих решток (площі некротизованої тканини) унаслідок природних процесів оновлення.

Зазначимо, що знайти загальний розв'язок математичної моделі, яка описує той чи інший біологічний процес, в аналітичному вигляді вдається лише тоді, коли вона містить лінійні диференціальні рівняння. У більшості випадків біологічні системи далекі від термодинамічної рівноваги, тому процеси, що відбуваються в них, описують нелінійними диференціальними рівняннями. Їх аналізують чисельно за використання відповідних пакетів комп'ютерних програм.

На рис. 4.11 наведено кінетичні криві (шукані залежності $x(t)$ та $y(t)$) для моделі загоєння рани (4.39) за фіксованих параметрів моделі.

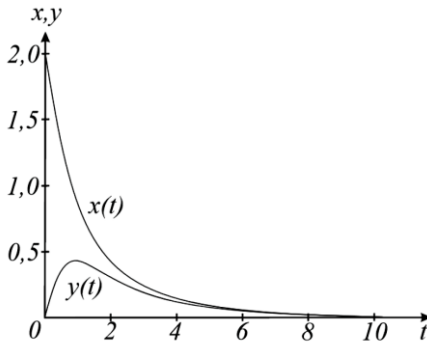


Рис. 4.11. Зміна із часом розмірів (площі) поверхні рани (x) та некротизованої тканини (y) у моделі (4.39)

Як бачимо, величина площі некротизованої тканини y зростає упродовж певного проміжку часу, що є природним, досягає максимуму, а потім спадає із часом до повного загоєння рани ($x(t) \rightarrow 0$). Зауважимо, що в початковий момент часу, прийнятий за $t=0$, $y(0)=0$, а $x(0)=2$.

4.7. Математична модель поширення вірусної епідемії

У моделі поширення вірусної епідемії диференціальні рівняння для неінфікованих (x), інфікованих (y) та осіб, які одужали (z), мають такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha xy \\ \frac{dy}{dt} = \alpha xy - \beta y \\ \frac{dz}{dt} = \beta y. \end{cases} \quad (4.40)$$

Тут $\alpha > 0$ і $\beta > 0$ – параметри моделі: коефіцієнт взаємодії між неінфікованими та інфікованими особами (імовірність захворіти) і швидкість зменшення інфікованих осіб (імовірність одужати), відповідно.

Очевидно, справедливий такий закон збереження:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} + \frac{dz}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(x + y + z) = 0 \Rightarrow x + y + z = C,$$

тобто загальна кількість осіб, що проживають на певній території, не змінюється із часом (люди не помирають і не народжуються).

Систему трьох диференціальних рівнянь першого порядку (4.40) розв'яжемо чисельно, сформулювавши таку задачу Коші: $x(0) = 9$, $y(0) = 1$ та $z(0) = 0$, тобто $C = 10$.

На рис. 4.12 наведено кінетичні криві (шукані залежності $x(t)$, $y(t)$ та $z(t)$) для моделі поширення вірусної епідемії (4.40) за фіксованих параметрів моделі.

Як бачимо, відсоток неінфікованих осіб x (крива 1) із часом зменшується; відсоток інфікованих осіб y (крива 2), навпаки, зростає, досягаючи максимуму, а потім із часом теж спадає (досягає нуля приблизно за 3 роки); нарешті, відсоток осіб, які одужали z (крива 3), постійно зростає, виходячи на плато за деякий час (3 роки). Таким чином, за вибраних параметрів моделі

$\frac{\beta}{\alpha} = 2 > 1$ тривалість вірусної епідемії становить приблизно 3 роки (рис. 4.12 а).

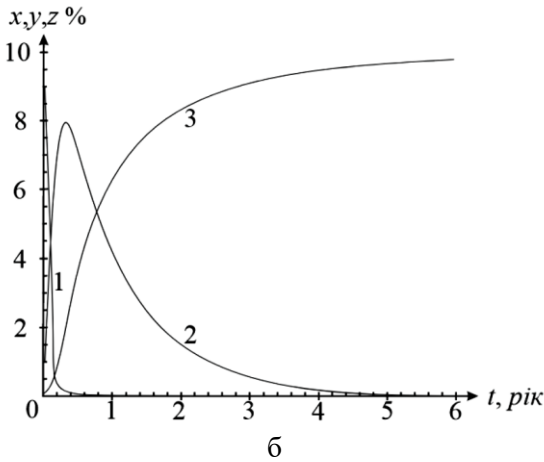
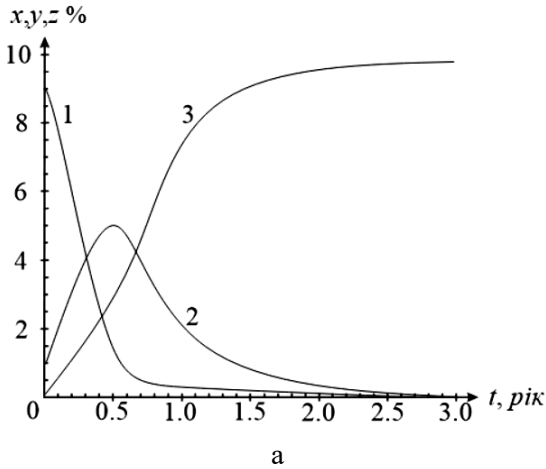


Рис. 4.12. Кінетичні криві моделі поширення вірусної епідемії (4.40) за різних співвідношень її параметрів: $\frac{\beta}{\alpha} > 1$ (а) і $\frac{\beta}{\alpha} < 1$ (б)

Водночас, якщо вибрати $\frac{\beta}{\alpha} = 0,5 < 1$, то тривалість вірусної епідемії зростає приблизно вдвічі (до 6 років) (рис. 4.12 б).

4.8. Математична модель росту злоякісної пухлини

Модель росту злоякісної пухлини враховує ефективність дії імунної системи організму на пухлинні клітини. Нехай x – концентрація імунокомпетентних клітин (напр. лімфоцитів) у пухлинному сайті, а y – концентрація пухлинних клітин в анатомічному сайті. Модель базується на таких припущеннях:

- лімфоцити з постійною швидкістю $\alpha > 0$ здатні надходити в анатомічний сайт за відсутності там пухлинних клітин;
- їхня кількість зменшується із часом прямо пропорційно кількості зі швидкістю $\beta > 0$ внаслідок інактивації та міграції з пухлинного сайту;
- ефективність взаємодії лімфоцитів і пухлинних клітин характеризується коефіцієнтом $\gamma_1 > 0$ (по суті, це сила імунної відповіді на пухлинні клітини, яка залежить від стану імунної системи, ступеня антигенності пухлини). Вважатимемо, що за малих значень x пухлина стимулює проліферацію лімфоцитів;
- кількість пухлинних клітин зростає із часом прямо пропорційно їхній кількості зі швидкістю $f > 0$;
- кількість пухлинних клітин зменшується внаслідок знешкодження лімфоцитами зі швидкістю $\gamma_2 > 0$.

Таким чином, модельна система має такий вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha - \beta x + \gamma_1 xy \\ \frac{dy}{dt} = fy - \gamma_2 xy. \end{cases} \quad (4.41)$$

На рис. 4.13 наведено кінетичні криві (шукані залежності $x(t)$ та $y(t)$) для моделі росту злоякісної пухлини (4.41) за фіксованих параметрів моделі.

Як бачимо, зміна шуканих величин $x(t)$ та $y(t)$ відбувається за коливальним законом. Поява і більшої кількості пухлинних клітин (крива $y(t)$) стимулює організм додатково продукувати імунокомпетентні клітини (крива $x(t)$) – їхня кількість починає різко зростати, досягаючи максимуму, а потім спадає із часом. Як і очікувалося, максимум чисельності імунокомпетентних клітин випереджає максимум чисельності онкоклітин (стадія одужання).

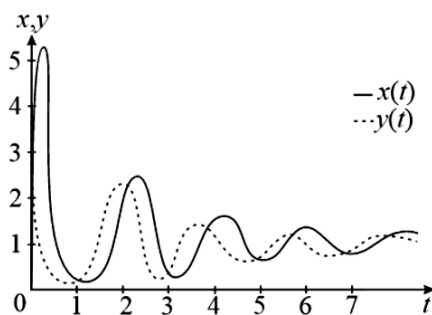


Рис. 4.13. Зміна із часом концентрацій лімфоцитів (x) і пухлинних клітин (y) у моделі (4.41)

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Костерін С. О. Біохімічна кінетика / С. О. Костерін, С. О. Карахім. – Київ : Наукова думка, 2021.
2. Костерін С. О. Механокінетика вісцеральних гладеньких м'язів та її модуляція наноматеріалами / С. О. Костерін, О. В. Цимбалюк. – Київ : Наукова думка, 2022.
3. Статистичні методи в біології / Ю. І. Прилуцький, О. В. Ільченко, О. В. Цимбалюк, С. О. Костерін. – Київ : Наукова думка, 2017.
4. Петровська І. Р. Статистичні методи в біологічних дослідженнях / І. Р. Петровська, Ю. Т. Салига, І. В. Вудмаска. – Київ : Аграрна наука, 2022.
5. Прилуцький Ю. І. Комп'ютерне моделювання в біології: підруч. для студ. ун-тів / Ю. І. Прилуцький, С. О. Костерін. – Київ : Наукова думка, 2024.
6. Медична і біологічна фізика / за ред. О. В. Чалого. – 2-ге вид. – Київ : Книга-плюс, 2005.
7. Барабаш Г. М. Вища математика для біологів : навч.-метод. посіб. Ч. I / Г. М. Барабаш. – Львів : Видав. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2013.
8. Барабаш Г. М. Вища математика для біологів : навч.-метод. посіб. Ч. II / Г. М. Барабаш. – Львів : Видав. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2014.
9. Кушніренко С. В. Методична розробка з курсу "Основи вищої математики" для студентів ННЦ "Інститут біології та медицини" / С. В. Кушніренко. – Київ, 2019.
10. Murry J. D. Mathematical Biology / J. D. Murry. – New-York : Springer-Verlag, 2008.

11. Aitken I. M. Mathematics for Biological Scientists / I. M. Aitken, B. Broadhurt, S. Hladky. – New-York : Taylor & Francis, 2009.

12. Antoniouk A. V. Mathematics and Life Sciences / A. V. Antoniouk, R. V. N. Melnik. – Berlin ; Boston : De Gruyter, 2013.

Відомості про авторів



ПРИЛУЦЬКИЙ ЮРІЙ ІВАНОВИЧ – доктор фізико-математичних наук, професор. Випускник кафедри теоретичної фізики фізичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка (КНУ). Професор кафедри біофізики та нейробіології ННЦ "Інститут біології та медицини" КНУ. Автор понад 400 наукових праць, серед яких 16 колективних монографій (14 видані за кордоном), понад 300 статей представлені у наукометричній базі Scopus, більшість із яких опубліковані в міжнародних високорейтингових наукових виданнях кварталів Q1 і Q2; 15 патентів України на винахід. Фахівець у галузі біофізики й нанобіотехнологій. Стажувався в Інституті хімії та біотехнології Технічного університету Ілменау (м. Ілменау, ФРН) та Університеті Миколи Коперника (м. Торунь, Польща). За його безпосередньої участі й наукового керівництва одержано фундаментальні та прикладні результати щодо дизайну, синтезу, характеризування, вивчення фізико-хімічних властивостей і біоактивності новітніх вуглецевих наноматеріалів, на основі яких розроблено інноваційні нанобіотехнології для медицини й фармацевтики. Підготував одного доктора наук і дев'ять кандидатів наук у галузях біофізики, фізики і фізіології. Нагороджений почесною відзнакою вченої ради КНУ, відзнаками МОН України "За наукові та освітні досягнення" та НАН України "За професійні здобутки", золотою медаллю "Видатний винахідник" Всесвітньої організації інтелектуальної власності; лауреат нагороди Ярослава Мудрого АН Вищої школи України, заслужений діяч науки і техніки України, лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки.



КОСТЕРІН СЕРГІЙ ОЛЕКСІЙОВИЧ – доктор біологічних наук, професор, академік НАН України. Випускник кафедри біофізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка (КНУ). Заступник директора з наукової роботи й завідувач відділу біохімії м'язів Інституту біохімії ім. О. В. Палладіна НАН України. Професор ННЦ "Інститут біології та медицини" КНУ. Автор 370 наукових публікацій,

10 монографій (1 видана за кордоном) і підручників. 235 статей С. О. Костеріна представлені в наукометричній базі даних Scopus. Стажувався в Університеті імені Макмастера (Канада). За його безпосередньої участі й наукового керівництва одержано фундаментальні результати при дослідженні біохімічних, фізико-хімічних і функціональних властивостей енергозалежних Ca^{2+} -транспортувальних протеїнів мембран гладеньком'язових клітин. Розробив нові методи кінетичного аналізу біохімічних і біофізичних процесів. Підготував 7 докторів і 15 кандидатів наук у галузях біохімії та біофізики. Віцепрезидент Українського біохімічного товариства; лауреат Державної премії України в галузі науки і техніки, премій ім. О. В. Палладіна НАН України, ім. П. Г. Костюка НАН України; заслужений діяч науки і техніки України. Нагороджений почесною грамотою та відзнакою Верховної Ради України "За особливі заслуги перед Українським Народом", а також відзнаками Президії НАН України "За наукові досягнення" та "За підготовку наукової зміни", почесною відзнакою вченої ради КНУ "За досягнення у науково-педагогічній роботі". Лауреат премії "Золота Фортуна" з врученням ордена Святого князя Володимира Великого III ступеня і нагороди Ярослава Мудрого АН Вищої школи України.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
Розділ 1. Основи аналітичної геометрії та лінійної алгебри	14
1.1. Вектор. Декартова система координат	14
1.2. Скалярний і векторний добуток.....	16
1.3. Рівняння прямої та площини.....	18
1.4. Лінії та поверхні другого порядку	21
1.5. Системи алгебраїчних рівнянь. Матриці, визначники та їхні властивості.....	27
Розділ 2. Основи математичного аналізу	39
2.1. Функція однієї змінної. Границя функції. Неперервність функції.....	39
2.2. Похідна функції. Її геометричний і фізичний зміст. Диференціал функції. Правила диференціювання	42
2.3. Правило Лопітала. Похідні вищих порядків.....	47
2.4. Формула Тейлора	48
2.5. Дослідження функцій на екстремум. Асимптоти графіків функцій.....	51
2.6. Функція двох змінних. Частинні похідні. Екстремум функції двох змінних (метод найменших квадратів)	60
2.7. Невизначений інтеграл. Основні методи інтегрування функцій.....	67
2.8. Визначений інтеграл (формула Ньютона – Лейбніца). Невласний інтеграл першого роду. Ряд Фур'є.....	72
Розділ 3. Основи теорії звичайних диференціальних рівнянь	90
3.1. Лінійні та нелінійні диференціальні рівняння першого порядку. Задача Коші	90

3.2. Лінійні однорідні та неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.	
Комплексні числа (формула Ейлера)	99
Приклади контрольних модулів за тематикою розділів 1–3	110
Розділ 4. Використання математичних підходів у біології.....	112
4.1. Розрахунок параметрів емпіричної кінетичної кривої у фізико-хімічній біології.....	112
4.2. Динамічні закономірності обміну іонів Са у тканинному препараті.....	115
4.3. Кінетичні закономірності елементарного ензиматичного процесу	119
4.4. Кінетичні закономірності елементарного оборотного одностратного ензиматичного процесу	124
4.5. Багатопараметричний аналіз механокінетики скорочення – розслаблення гладеньких м'язів.....	126
4.6. Математична модель загоєння рани.....	132
4.7. Математична модель поширення вірусної епідемії.....	134
4.8. Математична модель росту злоякісної пухлини.....	136
Список рекомендованої літератури.....	138
Відомості про авторів	140

Навчальне видання

ПРИЛУЦЬКИЙ Юрій Іванович
КОСТЕРІН Сергій Олексійович

ОСНОВИ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ ДЛЯ БІОЛОГІВ

Навчальний посібник

Редактор *Н. Земляна*

Оригінал-макет виготовлено ВПЦ "Київський університет"

Виконавець *В. Гаркуша*



Формат 60x84^{1/16}. Ум. друк. арк. 8,4. Наклад 100. Зам. № 224-11187.
Гарнітура Times New Roman. Папір офсетний. Друк офсетний. Вид. № Б20.
Підписано до друку 04.12.24

Видавець і виготовлювач
ВПЦ "Київський університет"

Б-р Тараса Шевченка, 14, м. Київ, 01601, Україна
☎ (38044) 239 32 22; (38044) 239 31 58; (38044) 239 31 28
e-mail: vpc.knu.ua; vpc_div.chief@univ.net.ua; redaktor@univ.net.ua
http: vpc.knu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 1103 від 31.10.02